МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

П.А. ГУДКОВ

МЕТОДЫ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Под редакцией профессора А.М. Бершадского

ПЕНЗА 2008

УДК 519.254

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» Пензенского технологического института *Е.Г.Бершадская*

Гудков П.А.

Методы сравнительного анализа. Учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008 – 81 с.; 5 ил., 15 табл., библиогр. 12 назв.

Пособие рассчитано на читателей, для выполнения исследовательской работы которых необходимо проводить сравнения каких-либо объектов, процессов или явлений. В учебном пособии приводятся сведения по теории измерений, лежащей в основе сравнительного анализа. Рассматриваются различные методы экспертных оценок. Даются практические рекомендации по использованию методов сравнительного анализа.

Учебное пособие разработано на кафедре "Системы автоматизированного проектирования" и может быть использовано студентами специальностей 01.05.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и 23.01.04 «Системы автоматизированного проектирования», а также при подготовке бакалавров по направлению 23.01.00 "Информатика и вычислительная техника".

Введение

Во многих сферах человеческой деятельности часто возникает задача оптимального выбора, т.е. выбора объекта с максимальной количественной оценкой его качества из некоторого имеющегося набора исследуемых объектов. При этом оценка качества может быть как интегральной, т.е. по всем рассматриваемым критериям, так и частной (по одному или группе критериев).

Для осуществления такого выбора необходимо проведение анализа, который для изучения сложных, многоаспектных и противоречивых объектов требует серьезных аналитических усилий. В общем случае анализ должен быть комплексным, т.к. нет смысла анализировать отдельно взятые объекты, процессы и явления без конкретного социально-экономического, культурного или какого-либо другого контекста, без всестороннего анализа его предпосылок и последствий.

Изолированность объектов, процессов и явлений относительна. Каким бы своеобразием они ни обладали, между ними всегда существует определенная общность, открытость друг для друга, зависимость одного от другого. Каждый объект является элементом большой системы, где все взаимосвязано между собой. Изменение одной части системы неизбежно влечет за собой соответствующие изменения других ее частей. Поэтому цель анализа состоит не столько в том, чтобы изучить сущность изолированных объектов, сколько в том, чтобы отыскать – насколько это возможно – связи между отдельными объектами.

Поэтому при проведении сравнительного анализа какая-либо область рассматривается не узкопредметно, а системно, т.е. во взаимодействии различных объектов (компонентов) системы. На выявлении характера связей, закономерностей взаимодействия объектов между собой и социально-экономическими, культурными и другими явлениями и сконцентрированы методологические и методические основы сравнительного анализа. При этом аналитический подход закономерно перерастает в синтетический, системный, позволяющий создавать картину действительности более адекватно, прослеживая причинно-следственные связи, которые чаще всего лежат за узкими рамками ограниченного объекта.

Данное учебное пособие состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, включающего 12 наименований. В первой главе рассматриваются концептуальные основы сравнения объектов с использованием многих критериев; во второй – дается определение множества Парето; в третьей – излагаются сведения по теории измерений, лежащей в основе сравнительного анализа; в четвертой – рассматриваются различные методы сравнения объектов (метод анализа иерархий, метод комплексной оценки, сравнение с использованием функций полезности); в пятой главе рассматриваются различные методы экспертных оценок, а также приводится алгоритм групповой экспертной оценки объектов; в последней главе рассматриваются практические аспекты использования методов сравнительного анализа в задачах принятия решений.

1. Сравнение по многим критериям

Оптимальный выбор объекта предполагает какую-то количественную оценку его качества, учитывающую некоторые критерии. Другими терминами, используемыми для критериев, являются локальные критерии, показатели, показатели качества, целевые функции, факторы и т.п. Задача оценки качества относится к многокритериальным задачам оптимизации. Известно множество подходов к решению таких задач [3]:

- применение теории полезности для многокритериального выбора альтернатив из дискретного множества в условиях риска и неопределенности;

- сведение многокритериальной задачи к задаче скалярной оптимизации с помощью некоторой свертки векторного критерия;
- разработка человеко-машинных процедур решения многокритериальных задач оптимизации в интерактивном режиме;
- и др.

Можно выделить следующие основные проблемы, возникающие при оценке объектов по многим критериям:

- противоречивость критериев: улучшение по одному критерию обычно приводит к ухудшению по каким-либо другим критериям;
- невозможность аналитического (в виде формул) выражения связей между оценками по разным критериям;
- оценки по различным критериям имеют разный вид: числовые, содержательные ("отлично", "хорошо", "да-нет" и т.д.), балльные, в виде ранжирований и т.д. В общем случае под нечисловыми данными понимают элементы пространств, не являющихся линейными (векторными), в которых нет операций сложения элементов и их умножения на действительное число;
- числовые оценки отличаются по размерности (соответствуют разным физическим величинам и измеряются в разных единицах), по направленности (одни критерии требуется минимизировать, другие – максимизировать), по диапазону значений;
- различие критериев по важности.

Основной способ снятия этих проблем в процессе оценивания объектов – выявление и учет субъективных суждений эксперта. Обычно от человека требуется следующая информация:

- перечень сравниваемых объектов;
- перечень критериев, по которым будет проводиться сравнение;

- оценки объектов по критериям;
- суждения о важности критериев (т.е. информация о том, какие критерии важнее, какие – менее важны);
- ограничения по отдельным критериям;
- суждения о степени допустимости отставания по отдельным критериям, о компенсации одних критериев другими.

Для каждого объекта рассчитывается некоторая обобщенная оценка, в которой учитываются оценки по всем критериям. Для приведения оценок по различным критериям к единой форме и получения обобщенной оценки объекта используются следующие основные методы [12]:

- Переход от оценок различного вида к экспертным оценкам. Они могут указываться в виде балльных оценок, в долях единицы, в виде парных сравнений и т.д. Примером перехода к экспертным оценкам (в виде парных сравнений) является метод анализа иерархий (раздел 4.1).
- Для числовых оценок обычно выполняется переход к оценкам, имеющим значения от 0 до 1 и направленных на максимум (т.е. оценок, имеющих смысл "чем больше, тем лучше"). Обычно лучшей оценке по критерию соответствует значение 1. Пример – метод комплексной оценки (раздел 4.2).
- Для словесных оценок выполняется переход к числовой форме по следующим правилам: оценке "отлично" соответствуют числовые значения от 0,8 до 1; "хорошо" – от 0,63 до 0,8; "удовлетворительно" – от 0,37 до 0,63; "плохо" – от 0,2 до 0,37; "очень плохо" – от 0 до 0,2. Числовая оценка выставляется человеком (экспертом), исходя из его субъективных суждений. Например, если по некоторому критерию два объекта имеют оценку "хорошо", но один из них очень хороший, а другой – немного хуже, то первому (лучшему) можно назначить оценку 0,8, а второму – 0,7. Пример – метод комплексной оценки (раздел 4.2).

- Для оценок, имеющих вид "да-нет", используются следующие числовые значения: "да" – 0,67; "нет" – 0,33 (если по смыслу задачи оценка "да" нежелательна, то ей соответствует оценка 0,33, а "нет" – 0,67).

Результатом сравнения объектов должна быть некоторая упорядоченная их последовательность, располагающая объекты в порядке их предпочтения. По принципу приведения оценок объектов к единой оценке можно выделить следующие классы методов [3, 12]:

- Методы на основе выбора главного критерия. Т.е. выбирается один основной (главный) критерий, а на остальные критерии, как правило, накладываются ограничения. К этому же классу следует отнести методы, называемые "методами на основе лексикографического упорядочения критериев". В этих методах объекты сначала упорядочиваются по одному (главному) критерию; если по данному критерию оказывается несколько эквивалентных объектов, то используется следующий по важности критерий, и т.д. Методы этого класса достаточно просты. Однако они неприменимы для задач, в которых требуется учитывать несколько критериев, близких по важности.
- Методы на основе компенсации критериев. Принцип работы этих методов состоит в том, что от эксперта требуется указать, какая величина выигрыша по одному критерию компенсирует определенный (заданный) проигрыш по другому критерию. Однако указание таких величин компенсации крайне сложно для человека. Поэтому такие методы не нашли широкого применения.
- Методы на основе вычисления обобщенных оценок (обобщенного критерия). Принцип работы этих методов состоит в вычислении обобщенной оценки для каждого из объектов на основе их оценок по отдельным критериям. Один из таких методов – метод комплексной

оценки – будет рассмотрен в разделе 4.2. Достоинство таких методов – небольшой объем информации, требуемый от эксперта. Эти методы нашли широкое применение и реализованы во многих программных продуктах. В то же время они имеют ряд существенных недостатков:

- методы этого класса не позволяют в достаточной мере учесть субъективные суждения эксперта о превосходстве объектов друг над другом, о желательности (или нежелательности) значений критериев и т.д.;
- применение этих методов затрудняется при использовании критериев с нечисловыми оценками (словесные оценки, оценки "да-нет", оценки в виде ранжирований объектов и т.д.).

▪ Методы на основе попарного сравнения объектов. При использовании таких методов для каждой пары объектов определяется оценка превосходства одного объекта над другим; эта оценка может непосредственно указываться человеком или вычисляться на основе оценок по отдельным критериям. Такие методы обладают следующими достоинствами:

  - возможность полного учета суждений эксперта об объектах;
  - возможность использования оценок любых видов: числовых, содержательных, "да-нет" и т.д.

  Основной недостаток методов этого класса – необходимость большого количества парных сравнений, т.е. большой объем работы для человека (эксперта).

2. Определение множества Парето

Часто требуется не просто сравнить объекты между собой, а выбрать из них наилучшие. Определение множества Парето позволяет исключить заведомо неподходящие объекты [9]. Множество Парето обладает следующим свойством: любой из объектов, входящих в это множество, хотя бы по одному критерию лучше любого другого объекта, входящего в это множество.

То есть, определение данного множества помогает из всего множества объектов исключить те, которые уступают другим объектам по всем критериям.

Покажем, как это делается. Пусть имеется множество объектов, оцениваемых по k критериям – W_1, W_2, …, W_k. Для простоты предположим, что значения всех критериев необходимо максимизировать. Пусть среди множества объектов есть два x_1 и x_2 таких, что значения всех критериев W_1, W_2, …, W_k для первого из них больше или равны соответствующим значениям второго критерия, причем хотя бы один из них действительно больше. Очевидно, что в составе всего множества объектов нет смысла сохранять объект x_2, он вытесняется (или, как говорят, "доминируется") объектом x_1. Поэтому объект x_2 исключается из этого множества как неконкурентоспособный, а остальные объекты сравниваются аналогичным образом. В результате такой процедуры отбрасывания заведомо непригодных объектов исходное множество обычно сильно уменьшается.

При наличии двух критериев можно проиллюстрировать это следующим рисунком (рис. 2.1). Множество состоит из конечного числа объектов. Каждому объекту соответствуют определенные значения показателей W_1, W_2, т.е. объект изображается в виде точки на плоскости с координатами W_1, W_2.

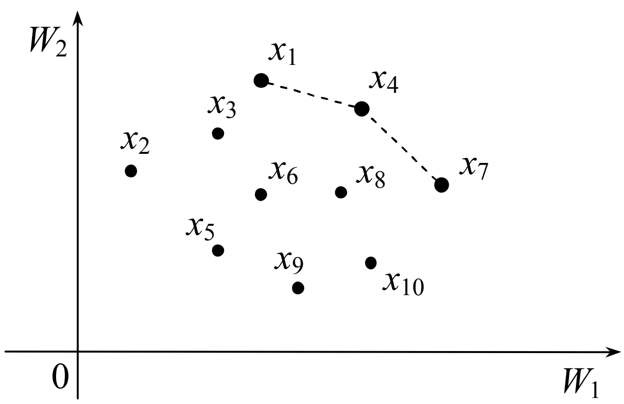

Рис. 2.1. Множество Парето

Очевидно, что объекты, принадлежащие множеству Парето, будут располагаться на правой верхней границе области (объекты x_1, x_4, x_7). Для всех остальных объектов существует хотя бы один доминирующий, для которого либо W_1, либо W_2, либо оба критерия имеют большие значения, чем для данного объекта.

При числе критериев больше трех геометрическая интерпретация теряет наглядность, но суть дела сохраняется. Результирующее множество объектов легче обозримо, чем исходное множество.

3. Основы теории измерений

Цель теории измерений – борьба с субъективизмом исследователя при приписывании численных значений реальным объектам. Результаты сравнения могут быть адекватными только тогда, когда они не зависят от того, какую именно единицу измерения предпочтет исследователь, т.е. когда они инвариантны относительно допустимого преобразования шкалы [8].

Как известно, шкала задается группой допустимых преобразований (раздел 3.1). Номинальная шкала (шкала наименований) задается группой всех взаимно-однозначных преобразований, шкала порядка – группой всех строго возрастающих преобразований. Это – шкалы качественных признаков. Группа линейных возрастающих преобразований $\varphi(x) = ax + b, a > 0,$ задает шкалу интервалов. Группа $\varphi(x) = ax, a > 0,$ определяет шкалу отношений. Наконец, группа, состоящая из одного тождественного преобразования, описывает абсолютную шкалу. Это – шкалы количественных признаков. Используют и некоторые другие шкалы.

Практическую пользу теории измерений обычно демонстрируют на примере задачи сравнения средних значений для двух совокупностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Пусть среднее вычисляется с помощью функции $f : R^n \to R^1$. Если

$$f(x_1, x_2,\ldots,x_n) < f(y_1, y_2,\ldots,y_n), \qquad (3.1)$$

то необходимо, чтобы

$$f(\varphi(x_1),\varphi(x_2),....,\varphi(x_n)) < f(\varphi(y_1),\varphi(y_2),....,\varphi(y_n)) \qquad (3.2)$$

для любого допустимого преобразования φ из задающей шкалу группы Φ. (В противном случае результат сравнения будет зависеть от того, какое из эквивалентных представлений шкалы выбрал исследователь.)

Требование равносильности неравенств (3.1) и (3.2) приводит к тому, что в порядковой шкале в качестве средних можно использовать только члены вариационного ряда, в частности, медиану, но нельзя использовать среднее геометрическое, среднее арифметическое, и т.д. В шкале интервалов можно использовать только среднее арифметическое, а в шкале отношений – только степенные средние.

Исходные данные об объектах могут иметь различную природу. Исторически самыми ранними были два вида данных – сведения о числе объектов, удовлетворяющих тем или иным условиям, и числовые результаты измерений.

Первый из этих видов данных часто встречается в различных статистических сборниках. Такого рода данные называют *категоризованными*, поскольку о каждом из рассматриваемых объектов известно, в какую из нескольких заранее заданных категорий он попадает. При этом часто жертвуют информацией, заменяя точное значение измеряемой величины на указание интервала группировки, в которую это значение попадает. Например, вместо точного возраста человека используют лишь один из указанных в таблице возрастных интервалов.

Второй наиболее распространенный вид данных – количественные данные, рассматриваемые как действительные числа. Таковы результаты измерений, наблюдений, испытаний, опытов, анализов. Количественные данные обычно описываются набором чисел. В простейшем случае эти данные представляют собой значения некоторых признаков, характеризующих изучаемые объекты.

Таким образом, значения могут быть количественными, или же представлять собой указание на категорию, к которой можно отнести объект. Во втором случае говорят о качественном признаке.

При измерении по нескольким количественным или качественным признакам в качестве описания объекта получаем вектор. Его можно рассматривать как новый вид данных. Есть часть координат – числа, а часть – качественные (категоризованные) данные, то говорят о векторе разнотипных данных.

Одной из характеристик объекта может быть и функция. Например, электрокардиограмма больного или амплитуда биений вала двигателя. Кроме того, объект может описываться бинарными отношениями. Например, при опросах экспертов часто используют упорядочения (ранжировки) объектов экспертизы – образцов продукции, инвестиционных проектов, вариантов управленческих решений. В зависимости от регламента экспертного исследования элементами выборки могут быть различные виды бинарных отношений (упорядочения, разбиения, толерантности), множества, нечеткие множества и т.д.

Таким образом, математическая природа сравниваемых объектов в различных задачах может быть самой разной. Однако можно выделить два основных класса данных – числовые и нечисловые.

Числовые данные – это числа, вектора, функции. Их можно складывать, умножать на коэффициенты.

Нечисловые данные – это категоризованные данные, вектора разнотипных признаков, бинарные отношения, множества, нечеткие множества и др. Они являются элементами нечисловых математических пространств (множеств). Математический аппарат анализа нечисловых статистических данных основан на использовании расстояний между элементами (а также мер близости, показателей различия) в таких пространствах (раздел 3.3).

3.1. Типы шкал измерений

В соответствии с теорией измерений при рассмотрении реального явления или процесса следует, прежде всего, установить *типы шкал*, в которых измерены те или иные параметры. Тип шкалы задает *группу допустимых преобразований шкалы*. Допустимые преобразования не меняют соотношений между объектами измерения. Например, при измерении длины переход от аршин к метрам не меняет соотношений между длинами рассматриваемых объектов – если первый объект длиннее второго, то это будет установлено и при измерении в аршинах, и при измерении в метрах. Следует обратить внимание, что при этом численное значение длины в аршинах отличается от численного значения длины в метрах – не меняется лишь результат сравнения длин двух объектов.

Рассмотрим основные виды шкал измерения и соответствующие группы допустимых преобразований.

В *шкале наименований* (другое название этой шкалы – *номинальная*) допустимыми являются все взаимно-однозначные преобразования. В этой шкале числа используются лишь как метки, т.е. лишь для различения объектов. В шкале наименований измерены, например, номера телефонов, автомашин, паспортов, студенческих билетов. Пол людей тоже измерен в шкале наименований, результат измерения принимает два значения – мужской, женский. Раса, национальность, цвет глаз, волос – номинальные признаки. Номера букв в алфавите – тоже измерения в шкале наименований. Никому в здравом уме не придет в голову складывать или умножать номера телефонов, такие операции не имеют смысла. Сравнивать буквы и говорить, например, что буква П лучше буквы С, также никто не будет. Единственное, для чего годятся результаты измерений в шкале наименований – для различения объектов. Во многих случаях только это от них и требуется.

В *порядковой шкале* числа используются не только для различения объектов, но и для установления порядка между объектами. Простейшим примером являются оценки знаний учащихся. Например, в средней школе применяются оценки 2, 3, 4, 5, а в высшей школе тот же смысл выражается словесно – неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. Этим подчеркивается "нечисловой" характер оценок знаний учащихся. В порядковой шкале допустимыми являются все строго возрастающие преобразования.

Установление типа шкалы, т.е. задание группы допустимых преобразований шкалы измерений – дело специалистов соответствующей прикладной области. Так, например, оценки привлекательности профессий можно считать измеренными в порядковой шкале. Однако можно использовать шкалу с более узкой группой допустимых преобразований, например, шкалу интервалов. Очевидно, эта проблема относится не к математике, а к наукам о человеке. Для ее решения может быть поставлен достаточно трудоемкий эксперимент. Пока же он не поставлен, целесообразно принимать порядковую шкалу, так как это гарантирует отсутствие возможных ошибок.

Оценки экспертов, как уже отмечалось, обычно следует считать измеренными в порядковой шкале, поскольку, как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например, сравнительного, характера, чем количественного. Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах.

В различных областях человеческой деятельности применяется много других видов порядковых шкал. Так, например, в минералогии используется шкала Мооса, по которому минералы классифицируются согласно критерию твердости. А именно: тальк имеет балл 1, гипс - 2, кальций - 3, флюорит - 4, апатит - 5, ортоклаз - 6, кварц - 7, топаз - 8, корунд - 9, алмаз - 10. Минерал с большим номером является более твердым, чем минерал с меньшим номером, при нажатии царапает его.

Порядковыми шкалами в географии являются – бофортова шкала ветров ("штиль", "слабый ветер", "умеренный ветер" и т.д.), шкала силы землетрясений. Очевидно, нельзя утверждать, что землетрясение в 2 балла (лампа качнулась под потолком) ровно в 5 раз слабее, чем землетрясение в 10 баллов (полное разрушение всех построек на поверхности земли).

Номера домов также измерены в порядковой шкале – они показывают, в каком порядке стоят дома вдоль улицы. Номера томов в собрании сочинений писателя или номера дел в архиве предприятия обычно связаны с хронологическим порядком их создания. Порядковая шкала используется и во многих других областях.

Все шкалы измерения делят на две группы – шкалы качественных признаков и шкалы количественных признаков. Порядковая шкала и шкала наименований – основные шкалы качественных признаков. Поэтому во многих конкретных областях науки и практики результаты качественного анализа можно рассматривать как измерения по этим шкалам.

Шкалы количественных признаков – это шкалы интервалов, отношений, разностей, абсолютных значений. По шкале *интервалов* измеряют величину потенциальной энергии или координату точки на прямой. В этих случаях на шкале нельзя отметить ни естественное начало отсчета, ни естественную единицу измерения. Исследователь должен сам задать точку (начало) отсчета и сам выбрать единицу измерения. Допустимыми преобразованиями в шкале интервалов являются линейные возрастающие преобразования, т.е. линейные функции. Температурные шкалы Цельсия и Фаренгейта связаны именно такой зависимостью: ${}^0C = 5/9\ ({}^0F - 32)$, где ${}^0C$ – температура (в градусах) по шкале Цельсия, а ${}^0F$ – температура по шкале Фаренгейта.

Из количественных шкал наиболее распространенными в науке и практике являются шкалы *отношений.* В них есть естественное начало отсчета – нуль, т.е. отсутствие величины, но нет естественной единицы измерения. По шкале отношений измерены большинство физических единиц: масса тела, длина, заряд, а также цены (и различные стоимостные характеристики) в экономике. Допустимыми преобразованиями в шкале отношений являются подобные преобразования (изменяющие только масштаб). Примером является пересчет цен из одной валюты в другую по фиксированному курсу.

В шкале *разностей* есть естественная единица измерения, но нет естественного начала отсчета. Допустимые преобразования – сдвиги, т.е. линейные функции с единичным коэффициентом линейного члена, свободный же член произволен. Время измеряется по шкале *разностей*, если год (или сутки – от полудня до полудня) принимаем естественной единицей измерения, и по шкале интервалов в общем случае. На современном уровне знаний естественного начала отсчета указать нельзя – дату сотворения мира различные авторы рассчитывают по-разному.

Только для *абсолютной* шкалы результаты измерений представляют собой числа в обычном смысле этого слова. Примером является число людей в комнате. Для абсолютной шкалы допустимым является только тождественное преобразование.

В процессе развития соответствующей области знания тип шкалы может меняться. Так, сначала температура измерялась по *порядковой* шкале (холоднее – теплее). Затем – по *интервальной* (шкалы Цельсия, Фаренгейта, Реомюра). Наконец, после открытия абсолютного нуля температуру можно считать измеренной по шкале *отношений* (шкала Кельвина). Надо отметить, что среди специалистов иногда возникают разногласия по поводу того, по каким шкалам следует считать измеренными те или иные реальные величины. Другими словами, процесс измерения включает в себя и определение типа шкалы (вместе с обоснованием выбора определенного типа шкалы). Кроме перечисленных шести основных типов шкал, иногда используют и другие шкалы.

3.2. Нечеткие множества

Результаты измерений по качественным признакам можно представить в виде нечетких (размытых, расплывчатых, *fuzzy*) множеств, их частным случаем являются интервалы. Т.е. нечеткие множества – это вид объектов нечисловой природы. Рассмотрим их подробнее.

Пусть A – некоторое множество. Подмножество B множества A характеризуется своей характеристической функцией

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Что такое нечеткое множество? Обычно говорят, что нечеткое подмножество C множества A характеризуется своей функцией принадлежности $\mu_C : A \to [0;1]$. Значение функции принадлежности в точке x показывает степень принадлежности этой точки нечеткому множеству. Нечеткое множество описывает неопределенность, соответствующую точке x – она одновременно и входит, и не входит в нечеткое множество C. Т.е. вероятность вхождения в нечеткое множество C равна $\mu_C(x)$, а вероятность того, что точка не входит в это множество, равна ($1-\mu_C(x)$).

Если функция принадлежности $\mu_C(x)$ имеет вид (3.3) при некотором B, то C есть обычное (четкое) подмножество A. Таким образом, теория нечетких множество является более общей математической дисциплиной, чем обычная теория множеств, поскольку обычные множества являются частным случаем нечетких.

Обычное подмножество можно было бы отождествить с его характеристической функцией. Этого математики не делают, поскольку для задания функции необходимо сначала задать множество. Нечеткое же подмножество с формальной точки зрения можно отождествить с его функцией принадлежности. Однако термин "нечеткое подмножество" предпочтительнее при построении математических моделей реальных явлений.

Теория нечеткости является обобщением интервальной математики. Действительно, функция принадлежности

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a;b], \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases}$$

задает интервальную неопределенность – про рассматриваемую величину известно лишь, что она лежит в заданном интервале $[a, b]$. Тем самым описание неопределенностей с помощью нечетких множеств является более общим, чем с помощью интервалов.

3.3. Расстояния (метрики)

Описание технического, социально-экономического или любого другого объекта изучения часто удается представить в виде вектора, часть координат которого измерена по количественным шкалам, а часть – по качественным, имеющим конечное число градаций.

В пространствах произвольной природы нет операции сложения, поэтому процедуры сравнения не могут быть основаны на использовании сумм. В связи с этим применяется другой математический аппарат, использующий понятие расстояния.

Как известно, расстоянием в пространстве X называется числовая функция двух переменных $d(x,y)$, $x \in X$, $y \in X$, определенная на этом пространстве, т.е. в стандартных обозначениях d: $X^2 \to R^1$, где R^1 – прямая, т.е. множество всех действительных чисел. Эта функция должна удовлетворять трем условиям (иногда их называют аксиомами):

1) неотрицательности: $d(x,y) \geq 0$, причем $d(x,x) = 0$, для любых значений $x \in X$, $y \in X$;
2) симметричности: $d(x,y) = d(y,x)$ для любых $x \in X$, $y \in X$;
3) неравенства треугольника: $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Для термина «расстояние» часто используется синоним – «метрика».

Пример 1. Если $d(x,x) = 0$ и $d(x,y) = 1$ при $x \neq y$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, то, как легко проверить, функция $d(x,y)$ – расстояние (метрика). Такое расстояние естественно использовать в пространстве X значений номинального признака: если два значения (например, названные двумя экспертами) совпадают, то расстояние равно 0, а если различны – то 1.

Пример 2. Расстояние, используемое в геометрии, удовлетворяет трем приведенным выше аксиомам. Если X – это плоскость, а $x(1)$ и $x(2)$ – координаты точки $x \in X$ в некоторой прямоугольной системе координат, то эту точку естественно отождествить с двумерным вектором $(x(1), x(2))$. Тогда расстояние между точками $x = (x(1), x(2))$ и $y = (y(1), y(2))$ согласно известной формуле аналитической геометрии равно

$$d(x,y) = \sqrt{(x(1)-y(1))^2 + (x(2)-y(2))^2}$$

Пример 3. Евклидовым расстоянием в пространстве R^k векторов вида $x = (x(1), x(2), \dots, x(k))$ и $y = (y(1), y(2), \dots, y(k))$ размерности k называется

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x(j)-y(j))^2 \right)^{1/2}$$

В примере 2 рассмотрен частный случай данного примера с $k = 2$.

Пример 4. В пространстве R^k векторов размерности k используют также так называемое «блочное расстояние», имеющее вид

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{k} \left| x(j) - y(j) \right|$$

Блочное расстояние соответствует передвижению по городу, разбитому на кварталы горизонтальными и вертикальными улицами. В результате можно передвигаться только параллельно одной из осей координат.

Обобщая вышесказанное, вводят понятие нормы вектора [2]. Говорят, что в пространстве R^m задана норма, если каждому вектору x из R^m сопоставлено вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* вектора x и обладающее следующими свойствами:

1. $\|x\| \geq 0,$ причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ для любого вектора x и любого числа α ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых векторов x и y.

Существует множество различных способов введения норм. Наиболее употребительными являются следующие три нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \tag{3.4}$$

Первые две из них являются частными случаями более общей нормы:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \tag{3.5}$$

(при $p = 1$ и $p = 2$), а последняя, как можно показать, получается из нормы (3.5) предельным переходом при $p \to \infty$.

Норма $\|x\|_2$ является естественным обобщением на случай m-мерного пространства понятия длины вектора в двух- и трехмерных геометрических пространствах. Поэтому ее называют *евклидовой нормой*.

Кроме того, справедливы неравенства

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m \cdot \|x\|_\infty , \tag{3.6}$$

указывающие на то, что в определенном смысле все три введенные нормы эквивалентны: каждая из них оценивается любой из двух других норм с точностью до множителя, зависящего от m.

Аналогичным образом вводят понятие нормы матрицы. Величина

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} \tag{3.7}$$

называется нормой матрицы A, подчиненной норме векторов, введенной в R^m.

Заметим, что множество всех квадратных матриц размера $m \times m$ является векторным пространством. Можно показать, что введенная в этом пространстве формулой (3.7) норма обладает следующими свойствами, аналогичными свойствам нормы вектора:

1. $\|A\| \geq 0,$ причем $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;
2. $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ для любого матрицы A и любого числа α ;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ для любых матриц A и B.

Дополнительно к этому верны следующие свойства:

4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для любых матриц A и B;
5. для любой матрицы A и любого вектора x справедливо неравенство $\|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Как следует из определения (3.7), каждой из векторных норм $\|x\|$ соответствует своя подчиненная норма матрицы A. Известно, в частности, что нормам $\|x\|_1, \|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ подчинены нормы $\|A\|_1, \|A\|_2$ и $\|A\|_\infty$, вычисляемые по формулам:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le j \le m} \sqrt{\lambda_i \cdot \left(A^T \cdot A\right)},$$

где $\lambda_i \cdot \left(A^T \cdot A\right)$ – собственные числа матрицы $A^T \cdot A$;

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} \left|a_{ij}\right|.$$

Нормы $\|A\|_1$ и $\|A\|_\infty$ вычисляются просто. Для получения значения первой из них нужно найти сумму модулей элементов каждого из столбцов матрицы A, а затем выбрать максимальную из этих сумм. Для получения значения $\|A\|_\infty$ нужно аналогичным образом поступить со строками матрицы A.

Как правило, вычислить значение нормы $\|A\|_2$ бывает трудно, так как для этого следует искать собственные числа λ_i. Для оценки величины $\|A\|_2$ можно, например, использовать неравенство $\|A\|_2 \le \|A\|_E$. Здесь $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} \left|a_{ij}\right|^2}$ – величина, называемая *евклидовой нормой* матрицы A.

4. Методы сравнения объектов

Существует большое количество методов и алгоритмов многокритериального выбора альтернатив. Рассмотрим некоторые из них.

4.1. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий можно применять не только для сравнения объектов, но и для решения более сложных задач: планирования и управления, прогнозирования и др. Поэтому основным достоинством данного метода является высокая универсальность – метод может применяться для решения самых разнообразных задач. Недостатком метода анализа иерархий является необходимость получения большого объема информации от экспертов.

Метод состоит из следующих этапов:

- Выполняется структуризация задачи: выделяются элементы, влияющие на решение задачи. Это могут быть объекты, для которых проводится сравнение; критерии, по которым оцениваются объекты; возможные сценарии развития процессов, связанных с решением задачи, и т.д.
- Строится иерархическое представление задачи: элементы задачи и связи между ними представляются в виде многоуровневой структуры.
- Выявляются экспертные оценки предпочтения элементов задачи относительно каждого элемента предыдущего (более высокого) уровня. Обычно для этого применяется один из методов экспертных оценок.
- Выполняется обработка экспертных оценок.

Рассмотрим применение метода анализа иерархий на примере. Пусть требуется оценить несколько альтернативных пакетов программ. Они различаются стоимостью, набором функциональных возможностей и дружественностью интерфейса. Исходные данные задачи представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

	ПО №1	ПО №2	ПО №3	ПО №4
стоимость	400	450	1200	500
функциональность	хорошая	средняя	отличная	хорошая
удобство использования ПО	удобно	удобно (немного лучше, чем для ПО №1)	очень удобно	очень удобно

Кроме того, при выборе программного обеспечения необходимо учесть, что критерии различны по важности. По мнению пользователя наиболее важными критериями являются функциональность и стоимость (причем критерий "функциональность" – немного более важный). Значительно менее важный критерий – удобство использования программы.

Этап 1. Выполняется структуризация задачи, т.е. выявляются элементы, которые требуется учитывать при решении. В данном случае требуется учесть оценки объектов по критериям, а также мнение пользователя о важности критериев.

Этап 2. Составляется иерархическое представление задачи (рис. 4.1). На первом уровне в иерархическом представлении задач, решаемых методом анализа иерархий, всегда указывается один элемент – цель. На втором уровне указаны критерии, по которым проводится оценка. На третьем уровне указаны сравниваемые объекты (с учетом критериев, по которым они оцениваются).

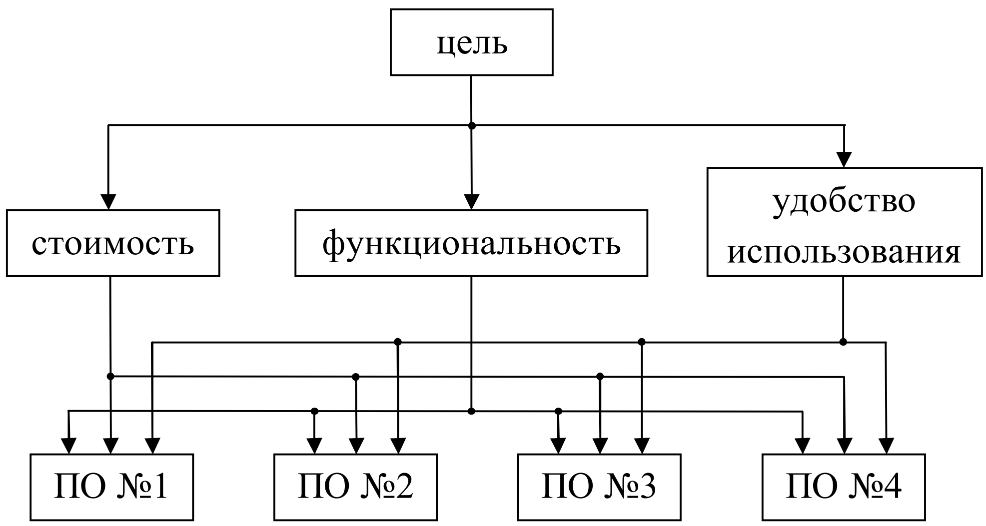

Рис. 4.1. Иерархическое представление задачи

Этап 3. Выявляются экспертные оценки предпочтения элементов задачи. На этом этапе определяются оценки важности критериев и оценки предпочтения объектов по каждому из критериев. Для этого используем метод парных сравнений (который будет рассмотрен в разделе 5.2).

Выявляются оценки важности критериев в виде матрицы парных сравнений (табл. 4.2).

Таблица 4.2

	K_1	K_2	K_3
K_1	1	1/2	7
K_2	2	1	8
K_3	1/7	1/8	1

Здесь, например, элемент $X_{12} = 1/2$ означает, что критерий K_1 (стоимость) немного менее важен, чем критерий K_2 (функциональность).

В результате обработки матрицы парных сравнений находятся *локальные приоритеты* (оценки важности) критериев: $LK_1 = 0{,}35$, $LK_2 = 0{,}59$, $LK_3 = 0{,}06$. Чем больше локальный приоритет, тем важнее критерий.

Затем проводится оценка объектов по каждому из критериев. Например, по критерию "стоимость" (табл. 4.3):

Таблица 4.3

	ПО №1	ПО №2	ПО №3	ПО №4
ПО №1	1	2	9	3
ПО №2	1/2	1	9	2
ПО №3	1/9	1/9	1	1/7
ПО №4	1/3	1/2	7	1

Здесь, например, элемент $X_{12} = 2$ означает, что по критерию "стоимость" ПО №2 немного лучше, чем ПО №1. Это видно из характеристик ПО (первое стоит 400 денежных единиц, второе – 450). Элемент $X_{13} = 9$ означает, что по критерию "стоимость" ПО №3 явно лучше, чем ПО №1 (стоимость составляют 400 и 1200 денежных единиц соответственно).

Локальные приоритеты объектов относительно критерия K_1: 0,48; 0,3; 0,04; 0,18. Чем больше локальный приоритет, тем лучше объект по данному критерию. В данном случае видно, что по критерию "стоимость" наилучшим является ПО №1, наихудшим – ПО №3.

Аналогично выполняется сравнение всех объектов по остальным критериям. Локальные приоритеты относительно критерия K_2: 0,25; 0,04; 0,45; 0,25. Локальные приоритеты относительно критерия K_3: 0,11; 0,19; 0,35; 0,35.

Этап 4. Выполняется обработка экспертных оценок, полученных на этапе 3. Находятся глобальные приоритеты всех элементов задачи, представляющие собой обобщенные оценки важности (предпочтения) этих элементов.

При использовании метода анализа иерархий глобальные приоритеты элементов второго уровня равны локальным приоритетам. Глобальные приоритеты элементов последующих уровней находятся с учетом их локальных приоритетов, а также глобальных приоритетов предыдущего (более высокого) уровня.

Таким образом получается, что глобальные приоритеты критериев равны их локальным приоритетам: $GK_1 = LK_1 = 0{,}35$; $GK_2 = LK_2 = 0{,}59$; $GK_3 = LK_3 = 0{,}06$.

Глобальные приоритеты каждого объекта находятся следующим образом: локальные приоритеты объектов относительно критериев умножаются на глобальные приоритеты соответствующих критериев; затем эти произведения складываются.

Для ПО №1 глобальный приоритет будет вычисляться следующим образом:

$$G_{ПО\ №1} = \sum_{i=1}^{3} L_{ПО\ №1}^{K_i} \cdot GK_i = 0,48 \cdot 0,35 + 0,25 \cdot 0,59 + 0,11 \cdot 0,06 = 0,32$$

Для остального программного обеспечения глобальные приоритеты будут равны 0,14; 0,3 и 0,23 соответственно.

Чем больше глобальный приоритет, тем лучше объект (с учетом всех критериев, а также с учетом их важности).

4.2. Метод комплексной оценки

Метод основан на вычислении обобщенной оценки (с учетом оценок по всем критериям). Основное его преимущество – минимальный объем информации, которую требуется получить от человека (эксперта).

Рассмотрим применение метода комплексной оценки на примере. Пусть требуется сравнить несколько электронных учебников ($У_1$, …, $У_4$) по заданной тематике. Их можно характеризовать стоимостью, легкостью и простотой использования, поддержкой средств тестирования, эффективностью изложения материала. Исходные данные задачи представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4

	$У_1$	$У_2$	$У_3$	$У_4$
стоимость	300	500	400	250
эффективность изложения материала	высокая	высокая	удовлетво-рительная	хорошая
поддержка средств тестирования	есть	нет	есть	есть
легкость и простота использования	2	4	2	3

Важность критериев оценивается двумя экспертами (преподавателями учебного заведения). По мнению первого из них, самые важные критерии – стоимость и легкость в использовании, менее важный – эффективность изложения материала, еще менее важный – наличие средств тестирования. По мнению второго эксперта, самый важный критерий – эффективность изложения материала, немного менее важные (и одинаковые по важности между собой) – стоимость и легкость в использовании, значительно менее важный – поддержка средств тестирования.

Требуется определить, какой из этих электронных учебников предпочтительнее использовать в учебном процессе.

Так как все критерии в задаче можно привести к числовому виду (критерий эффективности изложения материала имеет вид, близкий к пятибалльной шкале), то можно использовать метод комплексной оценки.

Прежде чем использовать этот метод, определим множество Парето. Выполнив сравнения объектов, получим, что во множество Парето войдут учебники $У_1$, $У_2$, $У_4$. Учебник $У_3$ не войдет в это множество, так как он ни по одному критерию не превосходит учебник $У_1$; поэтому $У_3$ исключается из рассмотрения.

Метод состоит из следующих этапов:

Этап 1. С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности.

В данном случае имеются суждения двух экспертов о важности критериев. Поэтому следует воспользоваться одним из групповых методов экспертных оценок. Используем метод непосредственной оценки (раздел 5.1).

Введем обозначения критериев: K_1 – стоимость учебника, K_2 – эффективность изложения материала, K_3 – поддержка средств тестирования, K_4 – легкость и простота использования.

Матрица оценок критериев приведена в таблице 4.5.

Таблица 4.5

	K_1	K_2	K_3	K_4
Эксперт 1	10	7	5	10
Эксперт 2	9	10	4	9

После вычисления средних значений и выполнения нормализации получаем следующие веса критериев: $V_1 = 0{,}3$, $V_2 = 0{,}27$, $V_3 = 0{,}14$, $V_4 = 0{,}3$.

Этап 2. Оценки объектов по критериям приводятся к безразмерному виду. Это преобразование выполняется по-разному в зависимости от вида и направленности критерия:

- Для критериев, подлежащих максимизации, все оценки объектов по данному критерию делятся на максимальную оценку.
- Для критериев, подлежащих минимизации, из оценок по данному критерию выбирается минимальная, и она делится на все оценки объектов по данному критерию.
- Для содержательных (словесных) критериев, выполняется переход к числовым оценкам.

Выполним переход к безразмерным оценкам для данного примера.

Критерий K_1 (стоимость) подлежит минимизации (чем меньше стоимость, тем лучше). Минимальная оценка по данному критерию (для $У_1$, $У_2$ и $У_4$) равна 250. Эта оценка делится на все оценки по данному критерию:

$P_{11} = 250/300 = 0{,}83$ $P_{12} = 250/500 = 0{,}5$ $P_{14} = 250/250 = 1$

Здесь через P_{ij} обозначены безразмерные оценки (i – номер критерия, j – номер объекта).

Критерий K_2 (эффективность изложения материала) – содержательный. Выполняется переход к числовым оценкам. Пусть экспертом указаны следующие оценки: для $У_1$ и $У_2$ (с высокой эффективностью) – 1, для $У_3$ (оценка "хорошо") – 0,8. Таким образом,

$P_{21} = 1$ $P_{22} = 1$ $P_{24} = 0{,}8$

Критерий K_3 (поддержка средств тестирования) принимает значения "да-нет" – имеются средства тестирования или же отсутствуют:

$P_{31} = 0{,}67$ $P_{32} = 0{,}33$ $P_{34} = 0{,}67$

Критерий K_4 (легкость и простота использования) подлежит максимизации. Максимальная оценка по этому критерию равна 4. Все оценки по данному критерию делятся на эту оценку:

$P_{41} = 2/4 = 0{,}5$ $P_{42} = 4/4 = 1$ $P_{44} = 3/4 = 0{,}75$

Безразмерные оценки сводятся в таблицу 4.6:

Таблица 4.6

	$У_1$	$У_2$	$У_4$
$К_1$	0,83	0,5	1
$К_2$	1	1	0,8
$К_3$	0,67	0,33	0,67
$К_4$	0,5	1	0,75

Таким образом, выполнен переход от разнообразных оценок по критериям к безразмерным оценкам. Все безразмерные оценки имеют значения в пределах от 0 до 1. Чем больше значение безразмерной оценки, тем лучше объект (по любому критерию).

Этап 3. Находятся веса критериев, отражающие разброс оценок. Веса определяются в следующем порядке.

- Находятся средние оценки по каждому критерию:

$$P_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} P_{ij}\,, \qquad i = 1,\ldots,M,$$

где M – количество критериев;

N – количество объектов;

P_{ij} – безразмерные оценки.

Для данного примера: P_1 = (0,83+0,5+1)/3 = 0,78; P_2 = 0,93; P_3 = 0,56; P_4 = 0,75.

- Находятся величины разброса по каждому критерию:

$$R_i = \frac{1}{N \cdot P_i} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left| P_{ij} - P_i \right|, \qquad i = 1,\ldots,M,$$

Для данного примера:

$$R_1 = \frac{|0,83-0,78| + |0,5-0,78| + |1-0,78|}{3 \cdot 0,78} = 0,24$$

$$R_2 = \frac{|1-0,93| + |1-0,93| + |0,8-0,93|}{3 \cdot 0,93} = 0,1$$

R_3 = 0,27; R_4 = 0,22.

- Находится сумма величин разброса:

$$R = \sum_{i=1}^{M} R_i$$

Для данного примера: R = 0,24 + 0,1 + 0,27 + 0,22 = 0,83.

- Находятся веса критериев, отражающие разброс оценок:

$$Z_i = \frac{R_i}{R}, \qquad i = 1,\ldots,M.$$

Для данного примера: Z_1 = 0,24/0,83 = 0,29; Z_2 = 0,1/0,83 = 0,12; Z_3 = 0,33; Z_4 = 0,27.

Чем больше разброс (различие) в оценках объектов по критерию, тем больше вес этого критерия. Таким образом, критерии, по которым оценки объектов существенно различаются, считаются более важными.

Этап 4. Находятся обобщенные веса критериев (учитывающие как мнение экспертов, так и разброс оценок объектов по данному критерию):

$$W_i = \frac{V_i + Z_i}{2}, \qquad i = 1, \ldots, M.$$

Для данного примера: W_1 = (0,3+0,29)/2 = 0,29; W_2 = 0,19; W_3 = 0,23; Z_4 = 0,28.

Этап 5. Находятся взвешенные оценки объектов (безразмерные оценки умножаются на веса соответствующих критериев):

$$E_{ij} = P_{ij} \cdot W_i, \qquad i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Взвешенные оценки для данного примера приведены в таблице 4.7:

Таблица 4.7

	$У_1$	$У_2$	$У_4$
$К_1$	0,24	0,15	0,29
$К_2$	0,19	0,19	0,15
$К_3$	0,16	0,08	0,16
$К_4$	0,14	0,28	0,21

Этап 6. Находятся комплексные оценки объектов (суммы взвешенных оценок):

$$E_j = \sum_{i=1}^{M} E_{ij}\ , \qquad\qquad j = 1,\ldots,N.$$

Для данного примера: $E_1 = 0{,}24 + 0{,}19 + 0{,}16 + 0{,}14 = 0{,}73$; $E_2 = 0{,}7$; $E_4 = 0{,}81$.

Лучшим является учебник с большей комплексной оценкой.

Примечание. Возможны другие варианты реализации метода комплексной оценки. Например, если имеются достаточно надежные экспертные оценки важности критериев, то вместо обобщенных весов критериев (W_i) можно использовать только веса, полученные на основе экспертных оценок (V_i). В этом случае не требуется определять веса, отражающие разброс оценок (Z_i). Наоборот, если получение экспертных оценок затруднено (нет возможности обратиться к эксперту), то для оценки важности критериев можно использовать только веса, отражающие разброс оценок (Z_i).

4.3. Сравнение с использованием функций полезности

Под функциями полезности понимаются функции $P = F(X)$, описывающие зависимость полезности альтернатив P от оценок этих альтернатив X. Меры полезности P обычно принимают значения из диапазона от нуля до единицы (чем лучше альтернатива, тем выше ее мера полезности). Функции полезности строятся на основе информации, полученной от эксперта. На основе мер полезности по отдельным критериям рассчитываются обобщенные меры полезности альтернатив, т.е. оценки, отражающие предпочтение альтернатив по всем критериям.

Для построения функции полезности от эксперта обычно требуется получить следующую информацию:

- суждения о том, какие значения критериев желательны, а какие – нежелательны;
- суждения о компенсации одних критериев другими;
- парные сравнения альтернатив с определенными оценками.

Пусть, например, требуется построить функции полезности для выбора лучшего варианта некоторого производственного оборудования. Оборудование оценивается по нескольким критериям (производительность, стоимость, время безотказной работы и т.д.). Для построения функций полезности эксперт, как правило, должен указать наиболее желательную и наименее желательную оценки по каждому из критериев. Чтобы построить функции полезности, более точно отражающие суждения лица, принимающего решения, от него потребуется ответить на ряд вопросов примерно следующего вида: “Какой вариант оборудования лучше: с производительностью 20 изделий в час и стоимостью 60 денежных единиц или с производительностью 30 изделий в час и стоимостью 90 денежных единиц?”.

Существуют различные методики построения функций полезности [7]. Методы анализа и выбора альтернатив на основе функций полезности имеют следующие достоинства:

- хорошая теоретическая обоснованность – разработан строгий математический аппарат, описывающий свойства функций полезности и правила их построения. По степени теоретической обоснованности методы на основе функций полезности превосходят все остальные методы многокритериального анализа альтернатив;
- высокая степень учета суждений эксперта о предпочтительности альтернатив;

- алгоритмы на основе функций полезности реализованы во многих действующих компьютерных системах поддержки принятия решений (СППР).

В то же время рассматриваемые методы имеют следующие недостатки:

- сложность получения от человека информации, необходимой для построения функций полезности (особенно – информации о компенсациях одних критериев другими);
- применение функций полезности затрудняется при использовании критериев с оценками, отличными от числовых (словесные оценки, оценки "да-нет", оценки в виде ранжирований альтернатив и т.д.).

Рассмотрим одну из методик анализа и выбора альтернатив, основанную на применении функций полезности. В данной методике используется простейшая функция полезности – линейная. Функции полезности имеют следующий вид:

- для критериев, подлежащих максимизации:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & X_{ij} > X_i^{\max} \\ \dfrac{X_{ij} - X_i^{\min}}{X_i^{\max} - X_i^{\min}}, & X_i^{\min} \le X_{ij} \le X_i^{\max} \\ S \cdot \dfrac{X_{ij} - X_i^{\min}}{X_i^{\max} - X_i^{\min}}, & X_{ij} < X_i^{\min} \end{cases}$$

- для критериев, подлежащих минимизации:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & X_{ij} < X_i^{\min} \\ 1 - \dfrac{X_{ij} - X_i^{\min}}{X_i^{\max} - X_i^{\min}}, & X_i^{\min} \le X_{ij} \le X_i^{\max} \\ S \cdot \left(1 - \dfrac{X_{ij} - X_i^{\min}}{X_i^{\max} - X_i^{\min}}\right), & X_{ij} > X_i^{\max} \end{cases}$$

где X_{ij} – оценка j-го объекта по i-му критерию;

$X_i^{\max}$, $X_i^{\min}$ – наиболее желательное и наименее желательное значение i-го критерия (эти величины, как правило, указываются экспертом и представляют собой субъективные суждения);

S – штрафной коэффициент, используемый для вычисления мер полезности альтернатив, у которых оценки хуже, чем наименее желательное значение по данному критерию (обычно используются значения S от 5 до 10);

P_{ij} – мера полезности j-й альтернативы по i-му критерию.

Таким образом, предполагается, что полезность альтернативы пропорциональна ее оценкам по каждому из критериев (чем ближе оценка альтернативы к наиболее желательному значению, тем выше ее полезность). Графическое представление функций полезности показано на рис. 4.2 (слева – для критерия, подлежащего максимизации, справа – для критерия, подлежащего минимизации).

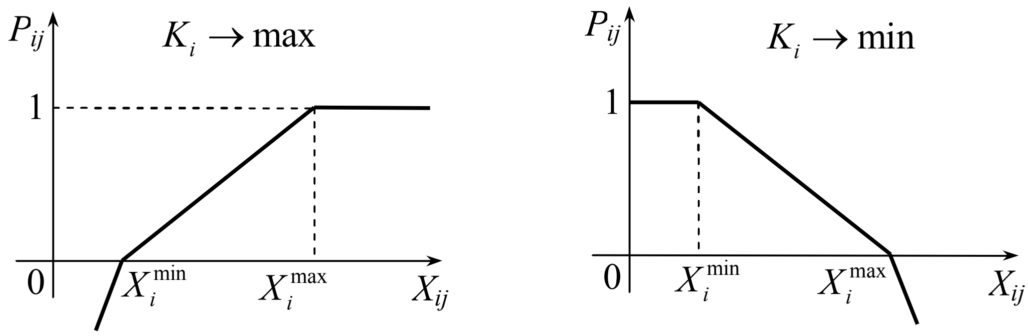

Рис. 4.2. Функции полезности

Наиболее и наименее желательные значения каждого критерия указываются человеком (экспертом). В качестве наиболее желательного значения он указывает значение критерия, которое его полностью удовлетворяет. В качестве наименее желательного указывается предельно допустимое значение критерия; если альтернатива имеет оценку хуже наименее желательной, то она считается неприемлемой.

Если человек затрудняется указать наиболее желательное (наименее желательное) значение критерия, то вместо него используется наилучшая (наихудшая) из имеющихся оценок альтернатив по соответствующему критерию.

Если оценка альтернативы по некоторому критерию оказывается лучше наиболее желательного значения данного критерия, то мера полезности альтернативы по данному критерию принимается равной единице (так как предполагается, что значение, указанное в качестве наиболее желательного, является вполне удовлетворительным, и более высокие оценки не требуются). Поэтому такие оценки не дают альтернативе преимущества над другими альтернативами.

Если оценка альтернативы по некоторому критерию хуже наименее желательного значения данного критерия, то мера полезности для такой альтернативы оказывается большим отрицательным числом (за счет умножения на штрафной коэффициент S). В результате такого “штрафа” альтернатива будет иметь низкую обобщенную меру полезности, рассчитываемую на основе мер полезности по отдельным критериям.

Для построения функций полезности указанного вида достаточно выяснить наиболее желательное и наименее желательное значение каждого из критериев. Как правило, у эксперта не возникает трудностей при указании этих величин. Недостаток функций полезности состоит в том, что они могут не в полной мере отражать суждения эксперта.

Приведем пример случая, когда система предпочтений лица, принимающего решения, не может быть отражена линейной функцией полезности. Пусть какое-то учреждение при выборе кандидатов на некоторую должность учитывает (среди других критериев) возраст кандидата. Наиболее предпочтительными считаются кандидаты в возрасте от 25 до 40 лет; кандидаты в возрасте от 40 до 50 лет рассматриваются как менее желательные, а лица моложе 25 или старше 50 лет на данную должность не принимаются. Для представления такой системы предпочтений требуется использовать кусочно-линейную или ступенчатую функцию полезности.

Важное достоинство рассматриваемой методики – возможность ее применения для выбора вариантов решений в условиях риска и неопределенности, т.е. в условиях, когда оценки альтернатив могут изменяться в зависимости от некоторых внешних факторов.

Рассмотрим пример. Предприятие, выпускающее три вида продукции, предполагает приобрести новое оборудование. Имеется выбор из трех вариантов (табл. 4.8). Необходимо сравнить их между собой и выбрать наиболее предпочтительный вариант.

Таблица 4.8

		O_1	O_2	O_3
Производительность, изделий в день (K_1)	продукция №1	50	62	60
	продукция №2	44	57	40
	продукция №3	36	50	38
Себестоимость продукции, денежных единиц (K_2)	продукция №1	120	90	78
	продукция №2	90	65	65
	продукция №3	90	80	60
Периодичность техобслуживания, недель (K_3)	продукция №1	3	9	8
	продукция №2	4	7	6
	продукция №3	3	7	7
Стоимость оборудования, тыс. денежных единиц (K_4)		1850	3100	2400

Кроме того, известно, что около 67% заказов на выпускаемую предприятием продукцию, составляют заказы на продукцию №1, 20% – на продукцию №2, 13% – на продукцию №3.

Данная задача представляет собой задачу многокритериального выбора в условиях риска, так некоторые характеристики альтернатив (производительность, себестоимость продукции и периодичность технического обслуживания) зависят от внешних условий, т.е. от вида заказов на продукцию. Имеются три варианта внешних условий (три вида продукции, которая может выпускаться предприятием). Следует обратить внимание, что выбор внешних условий невозможен – предприятие должно выпускать ту продукцию, на которую поступит заказ.

Для удобства записи хода решения будем обозначать критерии “производительность”, “себестоимость продукции”, “периодичность технического обслуживания” и “стоимость оборудования” как K_1, K_2, K_3, K_4 соответственно. Внешние условия обозначим как $У_1$, $У_2$, $У_3$.

Метод сравнения альтернатив с использованием функций полезности состоит из следующих этапов:

Этап 1. Строятся функции полезности. Для этого требуется выяснить у эксперта наиболее желательное и наименее желательное значение каждого из критериев. Пусть он указал следующие значения (табл. 4.9):

Таблица 4.9

	Производительность (K_1)	Себестоимость продукции (K_2)	Периодичность техобслуживания (K_3)	Стоимость оборудования (K_4)
Наиболее желательное значение	чем выше, тем лучше	50	8	2000
Наименее желательное значение	40	100	2	3200

В данном случае эксперт не указал наиболее желательную оценку по критерию “производительность”. В качестве такой оценки будет использоваться величина 62 (наилучшая из имеющихся оценок).

В случаях, когда оценка альтернативы хуже, чем указанная экспертом наименее желательная оценка, будем использовать штрафной коэффициент $S = 10$.

Таким образом, функции полезности имеют следующий вид:

- по критерию “производительность”:

$$P_{1j} = \begin{cases} 1, & X_{1j} > 62 \\ \dfrac{X_{1j} - 40}{62 - 40}, & 40 \le X_{1j} \le 62 \\ 10 \cdot \dfrac{X_{1j} - 40}{62 - 40}, & X_{1j} < 40 \end{cases}$$

- по критерию “себестоимость продукции”:

$$P_{2j} = \begin{cases} 1, & X_{2j} < 50 \\ 1 - \dfrac{X_{2j} - 50}{100 - 50}, & 50 \le X_{2j} \le 100 \\ 10 \cdot \left(1 - \dfrac{X_{2j} - 50}{100 - 50}\right), & X_{2j} > 100 \end{cases}$$

- по критерию “периодичность технического обслуживания”:

$$P_{3j} = \begin{cases} 1, & X_{3j} > 8 \\ \dfrac{X_{3j} - 2}{8 - 2}, & 2 \le X_{3j} \le 8 \\ 10 \cdot \dfrac{X_{3j} - 2}{8 - 2}, & X_{3j} < 2 \end{cases}$$

- по критерию “стоимость оборудования”:

$$P_{4j} = \begin{cases} 1, & X_{4j} < 2000 \\ 1 - \dfrac{X_{4j} - 2000}{3200 - 2000}, & 2000 \le X_{4j} \le 3200 \\ 10 \cdot \left(1 - \dfrac{X_{4j} - 2000}{3200 - 2000}\right), & X_{4j} > 3200 \end{cases}$$

Графики функций полезности приведены на рис. 4.3.

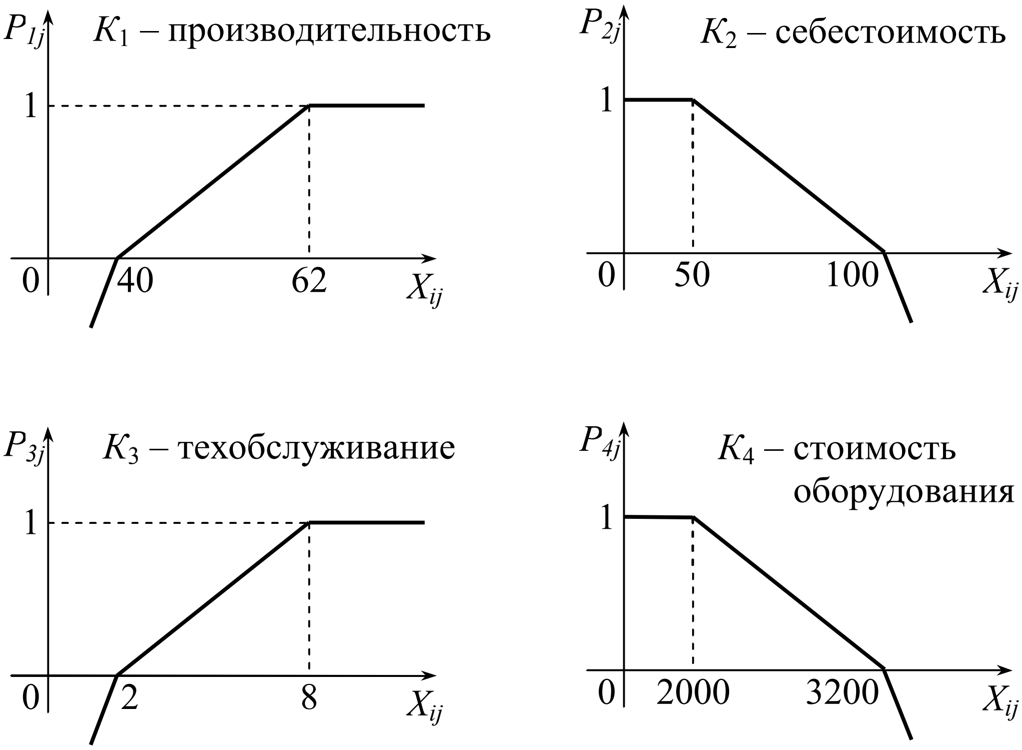

Рис. 4.3. Функции полезности

Этап 2. С помощью одного из методов экспертных оценок определяются веса (коэффициенты важности) критериев с точки зрения эксперта. Например, используем метод парных сравнений (который будет рассмотрен в разделе 5.2). Получим матрицу парных сравнений (табл. 4.10).

Таблица 4.10

	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1	1	3	8	4
K_2	1/3	1	7	3
K_3	1/8	1/7	1	1/6
K_4	1/4	1/3	6	1

Выполнив обработку данной матрицы парных сравнений, найдем веса критериев: $V_1 = 0{,}54$, $V_2 = 0{,}28$, $V_3 = 0{,}04$, $V_4 = 0{,}14$. Таким образом, по мнению эксперта, наиболее важным критерием является производительность, следующим по важности – себестоимость продукции, затем – стоимость оборудования, и наименее важный критерий – периодичность технического обслуживания.

Следующие этапы выполняются для каждого из вариантов внешних условий μ. Рассмотрим сравнение альтернатив для первого варианта условий, т.е. при выпуске первого вида продукции (μ = 1).

Этап 3. Находятся веса критериев, отражающие разброс оценок. Применяемый в данной методике способ определения весов критериев на основе разброса оценок аналогичен способу, применяемому в методе комплексной оценки (раздел 4.2):

- Находятся средние оценки по каждому критерию:

$$X_i^{\mu} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij}^{\mu}, \qquad i = 1,\ldots,M,$$

где M – количество критериев;

N – количество альтернатив;

X_{ij}^{μ} – оценки альтернатив.

Для данного примера: $X_1^1 = \frac{1}{3} \cdot (50 + 62 + 60) = 57,3$;

$X_2^1 = \frac{1}{3} \cdot (120 + 90 + 78) = 96$; $X_3^1 = 6,67$; $X_4^1 = 2450$.

- Находятся величины разброса по каждому критерию:

$$R_i^{\mu} = \frac{1}{N \cdot X_i^{\mu}} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left| X_{ij}^{\mu} - X_i^{\mu} \right|, \qquad i = 1,\ldots,M,$$

Для данного примера:

$$R_1^1 = \frac{|50 - 57,3| + |62 - 57,3| + |60 - 57,3|}{3 \cdot 57,3} = 0,09$$

$$R_2^1 = \frac{|120 - 96| + |90 - 96| + |78 - 96|}{3 \cdot 96} = 0,17$$

$R_3^1 = 0,37$ $\qquad R_4^1 = 0,18.$

- Находится сумма величин разброса:

$$R^{\mu} = \sum_{i=1}^{M} R_i^{\mu}$$

Для данного примера: $R^1 = 0,09 + 0,17 + 0,37 + 0,18 = 0,8$.

- Находятся веса критериев, отражающие разброс оценок:

$$Z_i^{\mu} = \frac{R_i^{\mu}}{R^{\mu}}, \qquad i = 1, \ldots, M.$$

Для данного примера: $Z_1^1 = \dfrac{0,09}{0,8} = 0,11$; $Z_2^1 = 0,21$; $Z_3^1 = 0,46$; $Z_4^1 = 0,22$.

Этап 4. Находятся усредненные веса критериев:

$$W_i^{\mu} = a \cdot V_i + b \cdot Z_i^{\mu}, \qquad i = 1, \ldots, M.$$

где a и b – коэффициенты доверия к весам, отражающим важность критериев с точки зрения эксперта (V_i) и к весам, полученным на основе разброса значений (Z_i^{μ}).

Для коэффициентов a и b должно выполняться условие $a + b = 1$. Значения a и b назначаются в зависимости от того, какие оценки важности критериев (указанные экспертом или найденные на основе разброса) требуется учесть в большей степени. Обычно используются значения $a = b = 0,5$.

В данном примере: $W_1^1 = 0,5 \cdot 0,54 + 0,5 \cdot 0,11 = 0,32$; $W_2^1 = 0,24$; $W_3^1 = 0,25$; $W_4^1 = 0,18$.

Этап 5. На основе функций полезности, построенных на этапе 1, находятся меры полезности альтернатив по каждому из критериев для рассматриваемого (μ-го) варианта внешних условий: P_{ij}^{μ}, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, N$. Меры полезности для первого варианта внешних условий приведены в табл. 4.11:

Таблица 4.11

	O_1	O_2	O_3
K_1	0,45	1	0,91
K_2	-4	0,2	0,44
K_3	0,17	1	1
K_4	1	0,08	0,67

Здесь, например, величина P_{11}^1 (мера полезности альтернативы O_1 по критерию “производительность” для первого варианта внешних условий) найдена следующим образом: $P_{11}^1 = \dfrac{50-40}{62-40} = 0,45.$

Величина P_{21}^1 (мера полезности альтернативы O_1 по критерию “себестоимость продукции”) найдена следующим образом: $P_{21}^1 = 10 \cdot \left(1 - \dfrac{120-50}{100-50}\right) = -4$, где 10 – штрафной коэффициент. Таким образом, мера полезности P_{21}^1 оказалась большим отрицательным числом; оно является “штрафом” за то, что оценка альтернативы O_1 по критерию “себестоимость продукции” (120) хуже, чем указанное экспертом наименее желательное значение данного критерия (100).

Величина P_{32}^1 (мера полезности альтернативы O_2 по критерию “периодичность технического обслуживания”) равна единице, так как оценка оборудования O_2 по данному критерию (9) лучше, чем указанное экспертом наиболее желательное значение критерия (8). По этой же причине $P_{41}^1 = 1$: оценка оборудования O_1 по критерию “стоимость линии” (1850) лучше, чем наиболее желательное значение данного критерия (2000).

Этап 6. Находятся обобщенные меры полезности альтернатив для рассматриваемого варианта внешних условий:

$$Q_j^{\mu} = \sum_{i=1}^{M} W_i^{\mu} \cdot P_{ij}^{\mu}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

В обобщенной мере полезности для каждой альтернативы учитываются меры полезности по каждому из критериев, а также оценки важности (веса) критериев.

Для данного примера обобщенные меры полезности следующие:

$$Q_1^1 = 0,32 \cdot 0,45 + 0,24 \cdot (-4) + 0,25 \cdot 0,17 + 0,18 \cdot 1 = -0,61;$$

$$Q_2^1 = 0,32 \cdot 1 + 0,24 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot 1 + 0,18 \cdot 0,08 = 0,64;$$

$$Q_3^1 = 0,32 \cdot 0,91 + 0,24 \cdot 0,44 + 0,25 \cdot 1 + 0,18 \cdot 0,67 = 0,77.$$

Этапы 3-6 повторяются для всех вариантов внешних условий.

Приведем результаты для второго варианта внешних условий. Веса критериев, отражающие разброс оценок: $Z_1^2 = 0,21$; $Z_2^2 = 0,23$; $Z_3^2 = 0,29$; $Z_4^2 = 0,22$.

Усредненные веса критериев $W_1^2 = 0,37$; $W_2^2 = 0,25$; $W_3^2 = 0,17$; $W_4^2 = 0,18$.

Меры полезности альтернатив по каждому из критериев (P_{ij}^2) приведены в табл. 4.12.

Таблица 4.12

	O_1	O_2	O_3
K_1	0,18	0,77	0
K_2	0,2	0,7	0,7
K_3	0,33	0,83	0,67
K_4	1	0,08	0,67

Обобщенные меры полезности: $Q_1^2 = 0,36$; $Q_2^2 = 0,62$; $Q_3^2 = 0,41$.

Приведем результаты для третьего варианта внешних условий. Веса критериев, отражающие разброс оценок: $Z_1^3 = 0,18$; $Z_2^3 = 0,19$; $Z_3^3 = 0,4$; $Z_4^3 = 0,22$.

Усредненные веса критериев $W_1^3 = 0,36$; $W_2^3 = 0,23$; $W_3^3 = 0,22$; $W_4^3 = 0,18$.

Меры полезности альтернатив по каждому из критериев (P_{ij}^3) приведены в табл. 4.13.

Таблица 4.13

	O_1	O_2	O_3
K_1	-1,82	0,45	-0,91
K_2	0,2	0,4	0,8
K_3	0,17	0,83	0,83
K_4	1	0,08	0,67

Обобщенные меры полезности: $Q_1^3 = -0,38$; $Q_2^3 = 0,46$; $Q_3^3 = 0,17$.

Этап 7. Обобщенные меры полезности, полученные для всех вариантов внешних условий, сводятся в матрицу “альтернативы-условия” (табл. 4.14):

Таблица 4.14

	$У_1$	$У_2$	$У_3$
O_1	-0,61	0,36	-0,38
O_2	0,64	0,62	0,46
O_3	0,77	0,41	0,17

Чем больше обобщенная мера полезности, тем лучше соответствующая альтернатива.

Этап 8. На основе обобщенных мер полезности выбирается рациональная альтернатива. Так как в данной задаче требуется учитывать оценки альтернатив в нескольких вариантах внешних условий, для выбора альтернативы применяются критерии для принятия решений в условиях риска и неопределенности. Выбор решения может осуществляться по-разному в зависимости от имеющейся информации о внешних условиях.

В данной задаче известны вероятности внешних условий: 67% заказов составляют заказы на продукцию №1, 20% – на продукцию №2, 13% – на продукцию №3. Выбор решения при известных вероятностях внешних условий называется принятием решения в условиях риска. В этом случае для выбора решения применяется *критерий Байеса* (критерий максимума среднего выигрыша). Для каждой альтернативы находится средняя обобщенная мера полезности с учетом вероятностей внешних условий:

$$Y_j = \sum_{\mu=1}^{L} Q_j^{\mu} \cdot P_{\mu}\,, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

где P_{μ} – вероятности внешних условий.

Для данного примера: $Y_1 = (-0,61) \cdot 0,67 + 0,36 \cdot 0,2 + (-0,38) \cdot 0,13 = -0,38$; $Y_2 = 0,61$; $Y_3 = 0,62$. Таким образом, в качестве рационального решения следует приобрести оборудование O_3.

Во многих случаях вероятности внешних условий неизвестны (выбор решения в этом случае называется принятием решения в условиях неопределенности). В таких условиях для выбора решения могут применяться следующие критерии.

Критерий Лапласа: решение принимается на основе предположения о том, что все варианты внешних условий равновероятны. Для каждой альтернативы находится средняя обобщенная мера полезности:

$$Y_j = \frac{1}{L} \cdot \sum_{\mu=1}^{L} Q_j^{\mu}\,, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

В данном примере $Y_1 = \frac{1}{3} \cdot \left((-0,61) + 0,36 + (-0,38)\right) = -0,21$; $Y_2 = 0,57$; $Y_3 = 0,45$. Таким образом, если заказы на все виды продукции поступают примерно с одинаковой частотой, то предприятию следует выбрать оборудование O_2.

Критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма): решение принимается в расчете на худший вариант внешних условий. При этом необходимо учитывать, что обычно для разных альтернатив наихудшими являются разные варианты внешних условий. Для каждой альтернативы находится минимальная обобщенная мера полезности, т.е. оценка для варианта внешних условий, который является для данной альтернативы наихудшим:

$$Y_j = \min_{\mu} Q_j^{\mu}, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

В данном примере $Y_1 = \min\left(-0,61; 0,36; -0,38\right) = -0,61$; $Y_2 = 0,46$; $Y_3 = 0,17$. Таким образом, если предприятие желает сделать наиболее осторожный выбор, то ему следует приобрести оборудование O_2.

Критерий Гурвица: решение принимается с учетом того, что возможны как благоприятные, так и неблагоприятные внешние условия. Для каждой альтернативы находится обобщенная мера полезности, в которой учитываются оценки как для наилучших, так и для наихудших внешних условий:

$$Y_j = a \cdot \min_{\mu} Q_j^{\mu} + (1-a) \cdot \max_{\mu} Q_j^{\mu}, \qquad j = 1, \ldots, N,$$

где a – коэффициент пессимизма ($0 \le a \le 1$), выбираемый из субъективных соображений. Чем больше требуется учитывать возможность неблагоприятных внешних условий, тем большим выбирается значение коэффициента пессимизма.

Пусть при выборе варианта оборудования требуется в равной степени учесть возможность как благоприятных, так и неблагоприятных внешних условий. Для этого выберем коэффициент пессимизма $a = 0,5$. Найдем меры полезности альтернатив: $Y_1 = 0,5 \cdot \left(-0,61\right) + 0,5 \cdot 0,36 = -0,12$; $Y_2 = 0,55$;

$Y_3 = 0,47$. Таким образом, предприятию следует приобрести оборудование O_2.

Рассмотренная методика может применяться и для принятия решений в условиях определенности, т.е. в случаях, когда внешние условия точно известны. Пусть, например, предприятие планирует выпускать только первый вид продукции. В этом случае достаточно найти обобщенные оценки полезности альтернатив только для указанного варианта внешних условий: $Q_1 = -0,61$; $Q_2 = 0,64$; $Q_3 = 0,77$. Таким образом, следует выбрать оборудование O_3.

5. Методы экспертных оценок

Для обработки мнений экспертов о важности критериев в процессе сравнительного анализа используются методы экспертных оценок. Данные методы предназначены, в основном, для решения неструктурированных задач, когда математическое описание (формализация) задачи невозможно или очень сложно. Информация, полученная от экспертов, подвергается обработке на основе математических (статистических) методов.

Оценка с использованием методов экспертных оценок включает следующие основные этапы:

- определение цели экспертизы;
- формирование группы экспертов;
- разработка сценария и процедур экспертизы;
- сбор и анализ экспертной информации;
- обработка экспертной информации;
- анализ результатов экспертизы.

5.1. Метод непосредственной оценки

Непосредственная оценка представляет собой процедуру приписывания объектам числовых значений в шкале интервалов. Эти значение соответствует степени влияния того или иного объекта на наблюдаемый результат. В процессе сравнения эксперт должен поставить в соответствие каждому объекту точку на непрерывной числовой оси, например, на отрезке [0; 1]. Естественно, что эквивалентным по воздействиям объектам приписывается одно и тоже число.

Измерение предпочтения в шкале интервалов можно выполнить с высокой степенью доверия только при хорошей информированности экспертов о свойствах объектов и предметной области.

В ряде случаев, с целью ослабления этих условий, но, естественно, за счет уменьшения точности измерения вместо непрерывной числовой оси рассматривают балльную оценку, которая использует 5-, 10-, 100-балльные шкалы.

Однако непосредственная оценка не всегда должна использовать числовые шкалы. Например, цвет объекта невозможно представить в виде какого-либо числового значения, а переход к значениям частот спектра во многих случаях затруднителен для эксперта.

5.2. Метод парных сравнений

Предположим, что t объектов $A_1, A_2, \dots, A_t$ сравниваются попарно каждым из n экспертов. Всего возможных пар для сравнения имеется $s = t(t-1)/2$. Эксперт с номером γ делает r_γ повторных сравнений для каждой из s возможностей. Пусть $X(i, j, \gamma, \delta)$ – случайная величина, принимающая значение 1 или 0 в зависимости от того, предпочитает ли эксперт с номером γ объект A_i или объект A_j в δ-м сравнении двух объектов ($i, j = 1, 2, \dots, t,\ i \neq j,\ \gamma = 1, 2, \dots, n;\ \delta = 1, 2, \dots, r_\gamma$). Предполагается, что все сравнения проводятся независимо друг от друга, так что случайные величины $X(i, j, \gamma, \delta)$ независимы в совокупности, если не считать того, что $X(i, j, \gamma, \delta) + X(j, i, \gamma, \delta) = 1$. Предположим, что вероятность того, что $X(i, j, \gamma, \delta) = 1$ равна $\pi(i, j, \gamma, \delta)$:

$$P(X(i, j, \gamma, \delta) = 1) = \pi(i, j, \gamma, \delta).$$

При этом число наблюдений равно числу неизвестных параметров, поэтому для получения статистических выводов необходимо наложить априорные условия на вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, например:

$\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j, \gamma)$ – нет эффекта от повторений;

$\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j)$ – нет эффекта от повторений и от экспертов.

Теорию независимых парных сравнений целесообразно разделить на две части – непараметрическую, в которой задачи ставятся непосредственно в терминах $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, и параметрическую, в которой вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$ выражаются через меньшее число иных параметров.

В параметрической теории парных сравнений наиболее популярна так называемая линейная модель, в которой предполагается, что каждому объекту A_i можно сопоставить некоторую "ценность" V_i так, что вероятность предпочтения $\pi(i, j)$ (т.е. предполагается дополнительно, что эффект от повторений и от экспертов отсутствует) выражается следующим образом:

$$\pi(i, j) = H(V_i - V_j), \tag{5.1}$$

где $H(x)$ - функция распределения, симметричная относительно 0, т.е.

$$H(-x) = 1 - H(x) \tag{5.2}$$

при всех x.

Также применяются модели Терстоуна-Мостеллера и Брэдли-Терри, в которых $H(x)$ – соответственно функции нормального и логистического распределений.

Соотношение (5.1) вытекает из следующей модели поведения эксперта: он измерят "ценность" V_i и V_j объектов A_i и A_j, но с ошибками ε_i и ε_j соответственно, а затем сравнивает свои оценки ценности объектов $y_i = V_i + \varepsilon_i$ и $y_j = V_j + \varepsilon_j$. Если $y_i > y_j$, то он предпочитает A_i, в противном случае – A_j. Тогда

$$\pi(i, j) = P(\varepsilon_i - \varepsilon_j < V_i - V_j) = H(V_i - V_j). \qquad (5.3)$$

Обычно предполагают, что субъективные ошибки эксперта ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда функция распределения $H(x)$ из соотношения (5.3) непрерывна и удовлетворяет функциональному уравнению (5.2).

Существует много разновидностей моделей парных сравнений, постоянно предлагаются новые. В качестве примера опишем модель парных сравнений, основанную не на процедуре упорядочения, а на определении сходства объектов. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном евклидовом пространстве R^r. Эксперт "измеряет" a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно и в случае, если евклидово расстояние между $a_i + \varepsilon_i$ и $a_j + \varepsilon_j$ меньше 1, заявляет о сходстве объектов A_i и A_j, в противном случае – об их различии. Предполагается, что ошибки ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же распределение, например, круговое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией координат σ^2. Целью статистической обработки является определение по результатам парных сравнений оценок параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$, и σ^2, а также проверка согласия опытных данных с моделью.

Рассмотренные модели парных сравнений могут быть обобщены в различных направлениях. Так, можно ввести понятие "ничья" – ситуации, когда эксперт оценивает объекты одинаково. Модели с учетом "ничьих" предполагают, что эксперт может отказаться от выбора одного из объектов и заявить об их эквивалентности, т.е. число возможных ответов увеличивается с 2 до 3. В моделях множественных сравнений эксперту представляется не два объекта, а три или большее число.

Модели, учитывающие "ничьи", строятся обычно с помощью используемых в психофизике "порогов чувствительности": если $|y_i - y_j| \le r$ (где r – порог чувствительности), то объекты A_i и A_j эксперт объявляет неразличимыми. Приведем пример модели с "ничьими", основанной на другом принципе. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном линейном пространстве. Как и прежде, эксперт "измеряет" объектные точки a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно, т.е. принимает решение на основе $y_i = a_i + \varepsilon_i$ и $y_j = a_j + \varepsilon_j$. Если все координаты y_i больше соответствующих координат y_j, то A_i предпочитается A_j. Соответственно, если каждая координата y_i меньше координаты y_j с тем же номером, то эксперт считает наилучшим объект A_j. Во всех остальных случаях эксперт объявляет о ничейной ситуации. Эта модель при $r = 1$ переходит в описанную выше линейную модель. Она связана с принципом Парето в теории группового выбора и предусматривает выбор оптимального по Парето объекта, если он существует, и отказ от выбора, если такого объекта нет.

Можно строить модели, учитывающие порядок предъявления объектов при сравнении, зависимость результата сравнения от результатов предшествующих сравнений. Опишем одну из подобных моделей.

Пусть эксперт сравнивает три объекта – A, B, C, причем сначала сравниваются A и B, потом – B и C и, наконец, A и C. Для определенности пусть $A > B$ будет означать, что A более предпочтителен, чем B. Пусть при предъявлении двух объектов

$$P(A > B) = \pi_{AB}, P(B > C) = \pi_{BC}, P(A > C) = \pi_{AC}.$$

Теперь пусть пара B, C предъявляется после пары A, B. Естественно предположить, что высокая оценка B в первом сравнении повышает вероятность предпочтения B и во втором, и, наоборот, отрицательное мнение о B в первом сравнении сохраняется и при проведении второго сравнения. Это предположение проще всего учесть в модели следующим образом:

$$P(B > C \mid B > A) = \pi_{BC} + \delta, \qquad P(B > C \mid A > B) = \pi_{BC} - \delta,$$

где δ – некоторое положительное число, показывающее степень влияния первого сравнения на второе. По аналогичным причинам вероятности исхода третьего сравнения в зависимости от результатов первых двух можно описать так:

$$P(A > C \mid A > B, B > C) = \pi_{AC} + 2\delta, \qquad P(A > C \mid A > B, B < C) = \pi_{AC},$$
$$P(A > C \mid A < B, B > C) = \pi_{AC}, \qquad P(A > C \mid A < B, B < C) = \pi_{AC} - 2\delta.$$

Задача состоит в определении параметров π_{AB}, π_{BC}, π_{AC} и δ по результатам сравнений, проведенных n экспертами, а также в проверке адекватности модели.

Ясно, что можно рассматривать и другие модели, в частности, учитывающие тягу экспертов к транзитивности ответов (отсутствию противоречий в отдельных высказываниях эксперта). Очевидно, что проблемы построения моделей парных сравнений относятся не к области экспертного оценивания, а к тем прикладным областям, для решения задач которых они используются.

Таким образом, можно сказать, что парное сравнение представляет собой процедуру установления предпочтения объектов при сравнении всех возможных пар. В отличие от метода непосредственной оценки, при котором осуществляется упорядочение всех объектов сразу, парное сравнение представляет для экспертов более простую задачу. При сравнении каждой пары объектов возможны отношения либо порядка, либо эквивалентности. Парное сравнение есть измерение в шкале порядка. В результате сравнения каждой пары объектов O_i и O_j эксперт должен упорядочить эту пару, высказывая, что:

- либо объект O_i предпочтительнее объекта O_j ($O_i \succ O_j$);
- либо объект O_j предпочтительнее объекта O_i ($O_i \prec O_j$);
- либо эти объекты эквивалентны ($O_i \sim O_j$).

Переход от эмпирической системы к числовой системе осуществляется выбором такой функции f, что:

- если $O_i \succ O_j$, то $f(O_i) > f(O_j)$;
- если $O_i \prec O_j$, то $f(O_i) < f(O_j)$;
- для эквивалентных объектов $f(O_i) = f(O_j)$.

Количественные суждения о парах объектов (O_i, O_j) представляются в виде матрицы размером $n \times n$:

$$A = [a_{ij}], \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где a_{ij} – количественная оценка предпочтения объекта,

i, j – номера строк и столбцов в матрице сравнений,

n – число объектов.

Элементы a_{ij} определены по следующим правилам:

- если $a_{ij} = a$, то $a_{ji} = 1/a$, $a \neq 0$.
- если суждения i и j имеют одинаковую важность, то $a_{ij} = a_{ji} = 1$.

Итак, матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & 1 & \ldots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Матрицу A с результатами экспертного сравнения всех пар объектов удобно представить в виде таблицы, столбцы и строки которой определяют сравниваемые объекты, а ячейки содержат числовые значения.

После расчета матрицы парных сравнений необходимо вычислить по ней весовые коэффициенты:

$$\lambda_j = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_{ij}}$$

Для нормализации значений используется формула:

$$\lambda_j^{норм} = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Пример использования метода парных сравнений показан в разделе 4.1.

5.3. Алгоритм групповой экспертной оценки объектов

Результатом опроса экспертов является информация, выражающая предпочтение экспертов и содержательное обоснование этих предпочтений. Наличие как числовых данных, так и содержательных высказываний экспертов, приводит к необходимости применения качественных и количественных методов обработки результатов группового экспертного оценивания.

Существует множество подходов к решению задачи групповой экспертной оценки объектов. Рассмотрим один из них. Пусть m экспертов провели оценку n объектов по l показателям. Результаты оценивания представлены величинами x_{ij}^h, где i – номер объекта, j – номер эксперта, h – номер показателя. Величины x_{ij}^h, полученные методам непосредственного оценивания, представляют собой числа из некоторого отрезка числовой оси, или баллы.

В качестве групповой оценки для каждого из объектов можно принять среднее взвешенное значение его оценки

$$x_i = \sum_{h=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} q_h \, x_{ij}^h \, k_j, \ (i = \overline{1,n})$$

где q_h – коэффициенты весов показателей сравнения объектов,

k_j – коэффициенты компетентности экспертов.

Величины q_h и k_j являются нормированными, то есть

$$\sum_{h=1}^{l} q_h = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} k_j = 1$$

Коэффициенты q_h могут быть определены экспертным путем, как средний коэффициент веса h-ого показателя по всем экспертам, то есть

$$q_h = \sum_{j=1}^{m} q_{hj} \, k_j$$

Коэффициенты компетентности экспертов можно вычислить по апостериорным данным, то есть по результатам оценки объектов. Основной идеей этого вычисления является предположение о том, что компетентность эксперта должна оцениваться по степени согласованности его оценок с групповой оценкой объектов.

Для упрощения изложения ограничимся рассмотрением случая $h = 1$, то есть, когда групповое оценивание объектов проводится на основе только одного показателя. Алгоритм вычисления групповых оценок и коэффициентов компетентности экспертов для этого случая имеет вид:

- начальные условия при $t = 0$

  $$k_j^0 = \frac{1}{m}, \ (j = \overline{1,m})$$

  т. е. начальные значения коэффициентов компетентности для всех экспертов принимаются одинаковыми.

- рекуррентные соотношения для $t = 1, 2, 3 \ldots$

$x_i^t = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\, k_j^{t-1},\ (i = \overline{1,n})$ – групповая оценка для i-ого объекта на t-ом шаге на основе индивидуальных оценок x_{ij}.

$\lambda^t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^t x_{ij}$ – нормировочный коэффициент.

$k_j^t = \frac{1}{\lambda^t}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_i^t,\ (j = \overline{1, m-1})$ – коэффициенты компетентности j-ого эксперта на t-ом шаге.

$k_m^t = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} k_j^t$ – коэффициенты компетентности m-ого эксперта из условия нормировки.

- признак окончания итерационного процесса

$$\max\left(\left|x_i^t - x_i^{t-1}\right|\right) < \varepsilon$$

Пример. Три эксперта ($m = 3$) оценили два объекта ($n = 2$), получив следующие значения нормированных оценок (таблица 5.1):

Таблица 5.1

	O_1	O_2
Эксперт 1	0,3	0,7
Эксперт 2	0,5	0,5
Эксперт 3	0,2	0,8

Вычислим групповые оценки объектов и коэффициенты компетентности каждого из экспертов. Для этого воспользуемся приведенным выше алгоритмом, задавшись точностью вычисления $\varepsilon = 0{,}001$.

Средние оценки объектов первого приближения (при $t = 1$) будут равны:

$$x_1^1 = \frac{1}{3}\cdot(0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2) = 0{,}333 \qquad x_2^1 = \frac{1}{3}\cdot(0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}8) = 0{,}667$$

$x^1 = (0{,}333;\ 0{,}667)$

Вычислим нормировочный коэффициент λ^1:

$$\lambda^1 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \cdot x_j^1 = x_1^1 \cdot (0,3+0,5+0,2) + x_2^1 \cdot (0,7+0,5+0,8) = 1,665$$

Значение коэффициентов компетентности первого приближения примут значения:

$$k_1^1 = \frac{1}{1,665} \cdot (0,3 \cdot 0,333 + 0,7 \cdot 0,667) = 0,34$$

$$k_2^1 = \frac{1}{1,665} \cdot (0,5 \cdot 0,333 + 0,5 \cdot 0,667) = 0,30$$

$$k_3^1 = 1 - (0,34 + 0,30) = 0,36$$

k^1 = (0,34; 0,30; 0,36)

Вычисляя групповые оценки второго и т.д. приближения, получим:

x^2 = (0,324; 0,676) λ^2 = 1,676 k^2 = (0,341; 0,298; 0,3661)

x^3 = (0,3235; 0,6765) λ^3 = 1,6765 k^3 = (0,341; 0,298; 0,3661)

Результат третьего шага удовлетворяет условию окончания итерационного процесса и за значение групповой оценки принимается $x \approx x^3$ = (0,3235; 0,6765).

6. Практические аспекты использования сравнительного анализа

Наиболее часто методы сравнительного анализа используется в задаче принятия решений [5]. В таких задачах человек (или группа лиц) сталкивается с необходимостью выбора одного или нескольких альтернативных вариантов решений (действий, планов поведения). Необходимость проведения выбора обусловливается возникновением проблемной ситуации, в которой имеются два состояния – существующее и желаемое, причем имеется более одного способа достижения желаемого состояния (цели). У человека, оказавшегося в такой ситуации, имеется определенная «свобода выбора», т.е. существует некоторое количество (конечное или бесконечное) альтернативных вариантов решений, выбор среди которых целиком зависит от этого человека. Альтернативные варианты различаются результатами (последствиями, исходами), к которым они приводят. Последствия выбора различных вариантов решений характеризуются определенной степенью достижения цели выбора и не безразличны лицу, принимающему решение. У него имеются свои представления о достоинствах и недостатках отдельных исходов, свое собственное отношение к ним, а следовательно, и к существующим вариантам решений, т.е. существует система предпочтений. Поэтому человек заинтересован в выборе таких альтернативных вариантов, которые представляются ему наилучшими в соответствии с его системой предпочтений.

Принципиальная трудность осуществления выбора в задачах принятия решений состоит в неопределенности понятия «наилучший альтернативный вариант». В каждой задаче возникает вопрос – в каком смысле наилучший? Поэтому первым этапом решения таких задач является разработка методов структуризации задачи, которые позволяют прояснить представление о том, «что такое хорошо и что такое плохо» в данной задаче для данного лица, принимающего решение, и уже затем на основе этого представления осуществить сравнение альтернативных вариантов.

Разнообразие задач, рассматриваемых различными направлениями теории принятия решений, довольно велико. Возможны различные варианты классификации этих задач.

1. В зависимости от условий, в которых принимается решение, выделяют следующие виды задач:

- задачи, решаемые в условиях определенности – решение принимается при наличии полной и достоверной информации о состоянии внешней среды;

- задачи, решаемые в условиях риска – решение принимается в условиях, когда состояние внешней среды точно не известно.

Примером является продажа сезонных товаров: для реализации определенного количества сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать разумным образом: число точек, их размещение, товарные запасы и количество персонала на каждой из них так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

Под внешней средой здесь понимаются факторы, на которые невозможно влиять (или влияние на них ограниченно): спрос на продукцию или услуги, цены на используемые в производстве материалы, действия конкурентов и т.д. При принятии решений в условиях определенности точно известны все последствия принимаемого решения; в условиях риска последствия решений точно не известны (так как они зависят от внешних факторов).

2. В зависимости от возможностей математического описания (формализации) выделяют следующие виды задач:

- хорошо структурированные задачи – могут быть выражены формально (т.е. в виде уравнений, неравенств и т.д.) и решаются на основе математических методов;
- неструктурированные задачи – описываются только на содержательном уровне (в словесной форме) и решаются на основе неформальных процедур (методов экспертных оценок);
- слабоструктурированные задачи – содержат как количественные, так и качественные элементы. Эти задачи решаются на основе сочетания формальных и неформальных процедур (методов системного анализа).

3. В зависимости от вида оценок альтернатив выделяют следующие виды задач:

- однокритериальные задачи – при выборе альтернатив учитывается один критерий (показатель), выбранный в качестве основного. На другие критерии, как правило, накладываются ограничения;
- многокритериальные задачи – при выборе альтернатив учитывается несколько критериев, одинаковых или различных по важности.

Однокритериальные задачи обычно относятся к хорошо структурированным, а многокритериальные – к слабо- и неструктурированным.

4. По виду окончательного решения выделяют задачи, в которых требуется:

- определить одну наилучшую альтернативу;
- упорядочить имеющиеся альтернативы по предпочтительности;
- разделить альтернативы на несколько классов по определенным признакам;
- отнести некоторое явление (объект, процесс) к одному из классов аналогичных явлений, наиболее близкому к нему по некоторым признакам;
- определить наиболее вероятное состояние некоторого процесса в будущем (т.е. составить прогноз его развития).

Иногда (относительно редко) в результате исследования удается указать одно-единственное строго оптимальное решение, гораздо чаще – выделить область практически равноценных оптимальных (разумных) решений, в пределах которой может быть сделан окончательный выбор.

6.1. Модель задачи принятия решений

Одно из важнейших допущений теории принятия решений состоит в том, что не существует наилучшего в каком-либо абсолютном смысле решения. Решение может считаться наилучшим лишь для данного лица, принимающего решение, в соответствии с поставленной целью. Для того, чтобы помочь лицу, принимающему решение, разобраться в своем отношении к возможным последствиям выбора, чтобы в трудной и часто уникальной ситуации выделить основные аспекты влияния выбираемых решений на возможные последствия, строится многокритериальная модель. Использование модели позволяет провести объективный анализ и сравнить альтернативные варианты с учетом различных аспектов их последствий, а также отношения лица, принимающего решение, к этим последствиям. Такой модельный подход позволяет лицу, принимающему решение:

- выявлять и уточнять его предпочтения;
- выбирать решения, согласованные с этими предпочтениями, избегая логических ошибок в длинных и сложных цепях рассуждений.

Многокритериальная модель задачи принятия решений может быть представлена в следующем виде [5]:

$$< t, S, K, X, f, P, r >,$$

где t – постановка (тип) задачи; S – множество решений; K – множество критериев; X – множество шкал критериев; f – отображение множества допустимых решений во множество векторных оценок; P – система предпочтений лица, принимающего решение; r – решающее правило.

Рассмотрим элементы модели более подробно. *Постановка задачи* характеризует цели лица, принимающего решение. В зависимости от содержательной постановки задачи может потребоваться, например, найти наиболее предпочтительное решение, полностью упорядочить множество допустимых решений, выделить множество недоминируемых (неподчиненных) решений и т.п.

Множество S представляет собой *совокупность решений*, удовлетворяющих в каждой задаче определенным ограничениям и рассматриваемых как возможные способы достижения поставленной цели. Элементы множества S называются также допустимыми решениями, вариантами решений, стратегиями, действиями, альтернативами, вариантами и т.п. Множество решений (конечное или бесконечное) либо задается, либо формируется в ходе исследования.

Каждое решение приводит к определенному исходу, последствия которого оцениваются по критериям K_1, K_2, … K_n. Критериями являются такие показатели, которые:

- признаются лицом, принимающим решение, в качестве характеристик степени достижения подцелей поставленной цели;
- являются общими и измеримыми для всех допустимых решений;
- характеризуют общую ценность решений таким образом, что у лица, принимающего решение, имеется стремление получить по ним наиболее предпочтительные оценки (т.е. они не могут быть представлены в виде ограничений).

Множество критериев (векторный критерий) в некоторых задачах бывает задано, но обычно оно формируется в процессе исследования.

Для каждого из критериев должна быть задана или построена *шкала*, представляющая собой множество упорядоченных оценок. Шкалы X_1, X_2, … X_n образуют множество X и подробно рассматриваются в главе 3.

Декартово произведение $Y = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ образует множество векторных оценок. Каждое решение оценивается по шкалам X_1, X_2, … X_n, т.е. каждому решению s из S ставится в соответствие n-мерная векторная оценка $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, где x_i – некоторое значение i-го критерия по шкале X_i. Таким образом, множеству допустимых решений S ставится в соответствие множество допустимых векторных оценок (исходов) $A \subseteq Y$ с помощью отображения $f : S \to A$.

В теории принятия решений предполагается, что каждое лицо, принимающее решение, имеет некоторую *систему предпочтений*, из которой оно исходит при рациональных действиях. Под системой предпочтений лица, принимающего решение, будем понимать совокупность обычно не структурированных (тем более не формализованных) его представлений, связанных с достоинствами и недостатками сравниваемых решений. Такая совокупность представлений, как правило, бывает неполной, она формируется в результате накопления опыта (в частности, при решении аналогичных задач) и отражает общую стратегию, проводимую лицом, принимающим решение. Предпочтения лица, принимающего решение, структурируются, выявляются и формализуются (а иногда и окончательно формируются) обычно только в ходе специального исследования, направленного на построение модели. В многокритериальной модели система предпочтений описывается совокупностью P некоторых множеств с отношениями предпочтения (например, множеств критериев, интервалов между оценками допустимых решений определенного вида и т.п.).

Решающее правило представляет собой алгоритм упорядочения векторных оценок на основе информации о системе предпочтений лица, принимающего решение. Решающие правила различаются между собой как видами используемой в них информации, так и самими алгоритмами обработки информации. Поэтому пригодность того или иного решающего правила для конкретной задачи определяется возможностью получения необходимой информации, а также адекватностью используемого алгоритма обработки информации принятым и проверенным допущениям о предпочтениях лица, принимающего решение. Т.е. решающее правило можно рассматривать как метод принятия решения, определяющий принцип сравнения векторных оценок и вынесения суждений о предпочтительности одних из них по отношению к другим; оно может быть задано в виде аналитического выражения, алгоритма или словесной формулировки.

Например, из двух векторных оценок предпочтительнее та, которая имеет хотя бы одну большую компоненту и не имеет ни одной меньшей. Еще пример: одна векторная оценка предпочтительнее другой, если сумма ее компонент больше (предполагается одинаковая размерность разных компонент). Сравнение векторных оценок на основе решающего правила позволяет задать на множестве Y бинарное отношение предпочтения R. Решающее правило может обеспечивать сравнение всех допустимых векторных оценок (как, например, второе из приведенных выше правил) или лишь какой-либо части из них (как, например, первое). Упорядочение множества A с помощью некоторого решающего правила и использование свойств отображения f позволяют осуществить переход от высказывания суждений о предпочтениях на множестве A к высказыванию суждений о предпочтениях на множестве S и, следовательно, дают возможность упорядочить это множество.

Решающее правило должно приводить к такому *упорядочению множества* допустимых решений, которое соответствует содержательной постановке задачи и согласуется с принятыми в модели допущениями и системой предпочтений лица, принимающего решение. К принимаемым допущениям относятся допущения о полноте множества решений и набора критериев, об однозначности соответствия множества шкал множеству критериев, о достаточной точности оценки решений по шкалам критериев, о системе предпочтений, возможностях ее выявления и т.п. В зависимости от принятых допущений, а также от целей и предпочтений лица, принимающего решение, могут быть построены различные решающие правила.

Основные проблемы, возникающие при построении моделей многокритериальных задач, связаны с трудностями получения информации, необходимой для разработки таких моделей. Как правило, при анализе конкретных многокритериальных задач оказывается, что:

- отсутствует полный перечень допустимых вариантов решений;

- неизвестен или не является полным перечень критериев, характеризующих качество решений;
- не построены все или некоторые шкалы критериев;
- не получены оценки всех вариантов решений по шкалам критериев;
- не сформировано решающее правило, позволяющее получить требуемое в задаче упорядочение.

Построение моделей многокритериальных задач принятия решений является сложной процедурой, состоящей из формализованных и неформализованных этапов (рис. 6.1), Результаты исследования модели позволяют получить упорядочение множества допустимых решений, согласованное с принятыми допущениями и используемой информацией. Поскольку всегда имеется возможность отразить одну и ту же ситуацию с помощью различных моделей, достоинства и недостатки этих моделей могут быть выявлены только на основе их сравнительного анализа и практического использования в реальных ситуациях.

6.2. Структурная схема процесса принятия решений

Рассмотрим структурную схему итеративной диалоговой процедуры принятия решений. Этапы этой процедуры (рис. 6.1) обусловливаются элементами многокритериальной модели, а последовательность этапов и виды возможных итераций – взаимосвязями элементов.

На первом этапе (блок 1) осуществляется постановка задачи, т.е. устанавливается вид требуемого упорядочения вариантов решений, формируется цель предстоящего исследования и содержательное значение понятия «вариант решения».

Рис. 6.1. Этапы процесса принятия решений

На втором этапе (блок 2) формируется множество вариантов решений, проверяется возможность использования их для достижения поставленной цели, устанавливается смысл понятия «допустимость», разрабатывается способ проверки допустимости вариантов решений и выделяется их множество.

Универсальных методов формирования множества допустимых вариантов решений не существует. Допустимые решения формируются на основе информации о реальной ситуации и имеющихся в задаче ограничений, а также на основе практического опыта лица, принимающего решение, экспертов и консультантов.

Во многих задачах множество допустимых решений может быть сформировано на основе морфологического анализа. Его суть заключается в том, что проблема, которая должна быть решена, разбивается на ряд независимых подпроблем (уровней). Затем для каждого уровня определяются возможные способы решения подпроблем (элементы уровня). Вариантом решения является набор элементов, в который входит в точности один элемент с каждого уровня. Для каждой пары элементов разных уровней определяется возможность их совместного включения в один вариант решения. Выявление недопустимых сочетаний позволяет, как правило, значительно сократить количество рассматриваемых вариантов решений.

Морфологический анализ позволяет описывать варианты решений в содержательных терминах, выявлять новые варианты, а также использовать ЭВМ для выделения множества допустимых решений и последующей оценки его элементов. Основная трудность применения морфологического анализа связана с неоднозначностью разбиения проблемы на подпроблемы.

Кроме того, при формировании множества допустимых решений может использоваться метод «мозгового штурма» (метод «коллективной генерации идей»), а также построение «дерева целей». Построение дерева целей позволяет сформировать множество допустимых решений вследствие существования альтернативных способов реализации целей нижнего уровня. В последнее время при формировании множества допустимых решений все чаще используется имитационное моделирование.

Затем (блок 3) проводится анализ возможных последствий реализации выделенных вариантов решений, определяется перечень показателей, характеризующих возможные последствия, и формируется набор критериев, достаточно полно характеризующих эти последствия.

Множество критериев формируется в результате исследования, направленного на выявление показателей, характеризующих такие свойства принимаемых решений или их последствий, которые отвечают поставленной цели. В каждой задаче возникает проблема определения необходимого и достаточного числа критериев (полного набора критериев), которые охватывали бы все важные стороны задачи.

Считают, что набор критериев является полным, если использование любых дополнительных критериев не изменяет результатов решения задачи, а отбрасывание хотя бы одного из выбранных критериев, наоборот, приводит к изменению результатов. Иными словами, набор из n критериев можно считать полным, если, зная значения n-мерного вектора оценок по этим критериям, лицо, принимающее решение, имеет ясное представление о степени достижения главной цели.

Формирование полного перечня критериев представляет собой сложную многошаговую итеративную процедуру, которая выполняется специалистами в конкретных областях знаний или деятельности совместно со специалистами в области организации процессов принятия решений. Эта процедура не может быть полностью формализована, так как основная часть необходимой информации может быть получена только путем опросов лица, принимающего решение и экспертов. Тем не менее, имеется определенная последовательность этапов процедуры, позволяющей целенаправленно осуществлять процесс формирования перечня критериев [5].

Независимо от способа формирования набор критериев в многокритериальной задаче должен удовлетворять определенным требованиям. Одно из них – полнота – было указано выше. Рассмотрим остальные:

- *Операциональность*. Каждый критерий должен иметь понятную для лица, принимающего решение, формулировку, ясный и однозначный смысл, характеризовать вполне определенный аспект последствий.
- *Декомпозируемость*. Набор критериев должен обеспечивать возможность упрощения задачи оценки предпочтений на множестве n-мерных исходов путем разбиения первоначальной задачи на отдельные более простые подзадачи.
- *Неизбыточность*. Различные критерии из набора не должны учитывать один и тот же аспект последствий.
- *Минимальность*. Набор должен содержать как можно меньшее количество критериев.
- *Измеримость*. Каждый критерий должен допускать возможность оценки (количественной или качественной) интенсивности характеризуемого им свойства (степени достижения соответствующей цели).

Разумеется, эти требования являются противоречивыми, они не могут быть удовлетворены все одновременно. Требование минимальности ориентирует на агрегирование критериев, которое часто приводит к противоречию с требованиями операциональности и измеримости; поскольку агрегированный критерий обычно имеет менее понятный и однозначный смысл, его труднее измерять. С другой стороны, требования полноты и операциональности ориентируют на декомпозицию критериев на элементарные (которые легко отличимы друг от друга), что приводит к увеличению количества критериев в наборе. Поэтому при формировании набора критериев в реальных задачах для удовлетворения этих требовании приходится идти на компромиссы.

Формирование набора критериев позволяет выделить те аспекты последствий, которые должны приниматься во внимание при сравнении различных вариантов решений. Однако сравнение вариантов удается провести лишь в том случае, если интенсивности свойств, определяемых выбранными критериями, могут быть измерены у всех допустимых вариантов. Таким образом, возникает необходимость в разработке оценочных шкал критериев (блок 4).

При построении оценочной шкалы критерия необходимо выяснить, в какой мере интенсивности соответствующего свойства различны у исходных сравниваемых вариантов решений и какие различия в интенсивностях этого свойства влияют на отношение к ним. Выяснение этих вопросов позволяет сформировать оценки шкалы соответствующего критерия и обеспечить необходимую точность измерения.

При формировании оценочных шкал для критериев, оценка решений по которым производится лицом, принимающим решение, или экспертами, очень важно, чтобы каждая оценка имела ясный смысл и четкое отличие от любой другой. Поскольку оценки многих показателей часто могут быть заданы только описательно, следует проверить взаимное соответствие критерия и шкалы, т.е. проверить, характеризует ли каждая оценка шкалы интенсивность именно того свойства, которое описывается данным критерием, и правильно ли назван критерий, для которого построена данная шкала.

Реализация операций третьего и четвертого этапов представляет собой сложную процедуру. Эти два этапа очень тесно связаны друг с другом. При разработке оценочных шкал может выясниться, например, комплексный характер одного из критериев, малая значимость какого-либо другого критерия, неоднозначность смысла критерия и т.д. В этих случаях осуществляется возврат к блоку 3 (пунктир на блок-схеме) и корректируются критерии.

Пятым этапом является оценка допустимых вариантов решений по шкалам выделенных критериев (блок 5). На этом этапе может также выясниться неоднозначность смысла некоторых критериев, их комплексный характер, излишняя детальность или, наоборот, неконкретность оценок, несоответствие содержания некоторых критериев их шкалам, неоднозначность смысла качественных оценок некоторых шкал. Все эти обстоятельства, безусловно, затрудняют оценку вариантов и требуют внесения соответствующих корректив или во множество критериев или их оценочных шкал.

Оценка вариантов решений по шкалам критериев может быть проведена либо посредством «физических» измерений, либо экспертным путем. Под «физическими» измерениями понимается не только собственно измерение технических или физических параметров, но и определение значений материальных, технико-экономических и тому подобных показателей, которые могут быть вычислены существующими расчетными методами.

Экспертные методы применяются в тех случаях, когда оценка вариантов решений не может быть проведена на основе «физических» измерений. При этом на «степень объективности» оценок влияют характер критерия и детальность шкалы.

При использовании экспертных методов не исключено, что различные специалисты дадут разные оценки одному и тому же варианту решения даже при использовании одной и той же шкалы. В связи с этим одна из задач состоит в построении настолько детальных и конкретных характеристик критериев и оценок по шкалам, чтобы не возникало затруднений при их применении.

Другим способом повышения достоверности оценок, получаемых от экспертов, является использование различных процедур согласования. Цель этих процедур состоит в том, чтобы обеспечить глубокое понимание задачи всеми специалистами, не навязывая им чье-либо мнение, а также в том, чтобы предоставить всем экспертам необходимую информацию.

В тех случаях, когда возникает необходимость получения коллективных экспертных оценок, могут быть использованы применяемые в социологии методы и процедуры опроса, позволяющие оценить надежность, обоснованность (валидность) и другие показатели, характеризующие результаты измерений. Один из алгоритмов групповой экспертной оценки объектов приведен в разделе 5.3.

Построение решающего правила, приводящего к требуемому упорядочению вариантов решений, может проводиться в несколько этапов. На каждом этапе осуществляется получение некоторой информации о предпочтениях лица, принимающего решения (блок 6). При выявлении системы предпочтений возникает серьезное затруднение, состоящее в том, что на практике получить ответы на многие вопросы бывает чрезвычайно трудно. Более того, попытки получить некоторые виды информации, характеризующей предпочтения, могут оказаться иногда безуспешными (например, попытки выявить весовые коэффициенты, характеризующие важность критериев). По мере получения все более сложных утверждений о предпочтениях лица, принимающего решение, уверенность в обоснованности этих утверждений уменьшается. Поэтому при выявлении предпочтений необходимо стремиться к использованию как можно более простой, надежной и действительно необходимой для решения задачи информации.

Другая трудность, связанная с выявлением системы предпочтений, состоит в том, что на практике может наблюдаться противоречивость в высказываниях лица, принимающего решение (например, нарушение транзитивности). Обнаружить противоречивость в информации о системе предпочтений часто оказывается очень сложно.

Третье затруднение при выявлении системы предпочтений состоит в том, что некоторые предпочтения могут изменяться и приводить к противоречивости суждений в процессе принятия решении.

Выявление системы предпочтений в рамках многокритериальной модели основано на высказывании лицом, принимающим решение, некоторых суждений о влиянии определенных изменений отдельных компонент векторных оценок или наборов этих компонент на общую предпочтительность (ценность, полезность) вариантов решений. Совокупность таких утверждений представляет собой информацию о системе предпочтений лица, принимающего решение. Закономерности, устанавливаемые в процессе анализа такой информации и характеризующие зависимость изменения предпочтительности вариантов решений от определенных изменений компонент их векторных оценок, выделяются в качестве допущений о системе предпочтений.

При исследовании возможных способов выявления системы предпочтений лица, принимающего решение, необходимо:

- четко выделять виды запрашиваемой информации о предпочтениях и проверять возможность их получения;
- рассматривать возможные способы получения информации каждого вида и выбирать из них наиболее простые и удобные для лица, принимающего решения.

Если в информации о предпочтениях обнаруживаются противоречия, то проводятся уточнения, их устраняющие. После этого выполняется построение соответствующего решающего правила (блок 7). Именно на этапе построения решающего правила проводится конкретизация понятия «предпочтение» и тем самым предопределяется упорядочение решений. В настоящее время опубликовано очень большое количество работ, посвященных различным вопросам, связанным с построением решающих правил.

Решающие правила, используемые в многокритериальных задачах, можно разделить по принципам построения на эвристические и аксиоматические, в соответствии с процедурами построения – на одношаговые и многошаговые, а по назначению – на правила, приводящие к полному или частичному упорядочению множества допустимых решений.

Аксиоматический подход к построению решающих правил предполагает принятие ряда аксиом о множестве решений, характере (структуре) предпочтений лица, принимающего решение, о возможностях получения определенных видов информации относительно предпочтений и т.д. Именно этот подход заложен в основу нормативной теории полезности, в которой рассматриваются различные наборы аксиом, позволяющие доказать существование скалярной положительно определенной функции полезности на множестве векторных оценок. Функция полезности может рассматриваться в этом случае как обобщенный, или глобальный, критерий, определяющий решающее правило. Задаваемые таким способом решающие правила ориентированы на полное упорядочение решений.

Аксиоматический подход к построению решающих правил не всегда связан с построением функции полезности. Так, например, существует целый ряд решающих правил, основывающихся на различных допущениях о системе предпочтений лица, принимающего решение, возможностях получения различных видов информации о ней и не требующих построения функции полезности.

Эвристический подход заключается в том, что предлагается какая-либо конкретная схема построения решающего правила определенного вида (или конкретное решающее правило), которая подкрепляется некоторыми соображениями, не основанными на четко сформулированных допущениях, из которых они вытекают. Решающие правила, предлагаемые на основании этого подхода, часто имеют вид функций полезности и могут рассматриваться как способы свертывания критериев. При свертывании критериев возникает необходимость в определении значений некоторых параметров свертки. Выбор и обоснование значений этих параметров в большинстве задач оказывается для лица, принимающего решение, не менее трудным, чем непосредственное упорядочение решений.

Методы построения как эвристических, так и аксиоматических решающих правил могут быть одношаговыми и многошаговыми. Одношаговые методы основаны на однократном использовании некоторого решающего правила, а многошаговые – на многократном.

Многошаговые методы позволяют сочетать исследование математических моделей с опытом и интуицией лиц, принимающих решения. В большинстве опубликованных работ описаны только такие процедуры, в которых лицо, принимающее решение, отвечает на вопросы, связанные с выявлением предпочтений определенного типа. Такой подход связан с использованием решающего правила определенного вида и последовательным уточнением некоторых его параметров. Однако такое уточнение не гарантирует обнаружения нарушений согласованности в получаемой информации о предпочтениях.

Одношаговые процедуры, как правило, используются в задачах, требующих полного упорядочения решений, а многошаговые – в задачах, требующих частичного упорядочения.

Ни одно из известных решающих правил не может быть признано свободным от недостатков, ограничивающих область его применения. Более того, построение универсальных решающих правил, по-видимому, невозможно в принципе. Это объясняется тем, что в зависимости от целей лица, принимающего решение, системы его предпочтений и возможностей получения информации о предпочтениях могут быть построены различные решающие правила.

На основе построенного решающего правила проводится сравнение и упорядочение вариантов решений (блок 8). Результаты упорядочения анализируются (блок 9). В процессе такого анализа может выясниться неудовлетворенность полученного упорядочения (блок 10), т. е. его несоответствие представлениям лица, принимающего решение, о качестве вариантов решения. Тогда исследуются причины неудовлетворительности (блок 11). Такими причинами могут оказаться:

- неадекватность использованной информации или допущений интуитивным предпочтениям;
- выпадение из анализа какого-либо допустимого варианта решения;
- неполнота набора критериев, используемых в модели;
- несоответствие шкал критериев возможностям оценки;
- неточности и просто ошибки при оценке некоторых допустимых вариантов;
- неточное определение понятия «допустимый вариант».

В зависимости от причин, которые привели к неудовлетворительности проведенного упорядочения вариантов решений, в рассматриваемую модель вносятся необходимые уточнения, дополнения или исправления (возможные коррективы указаны) и повторяются соответствующие этапы. Если упорядочение вариантов оказывается удовлетворительным (блок 10), то при использовании решающих правил, приводящих к частичному упорядочению векторных оценок, проверяется, соответствует ли его вид поставленной задаче (блок 12). Например, в поставленной задаче требуется линейно упорядочить допустимые варианты решений, а использованное решающее правило приводит лишь к частичному их упорядочению. Тогда вид полученного упорядочения, очевидно, не отвечает поставленной задаче, и необходимо получить дополнительную информацию о предпочтениях (возврат к блоку 6), построить новое, более «сильное» решающее правило и т.д. до тех пор, пока либо не будет получено упорядочение требуемого вида, либо не будут исчерпаны все возможности получения дополнительной информации. В последнем случае исходная постановка задачи должна быть смягчена и приведена в соответствие с имеющимися возможностями ее решения (показано пунктиром). Вид дополнительно получаемой информации, необходимой для построения более «сильного» решающего правила, устанавливается в результате анализа оценок вариантов, признанных несравнимыми на основе предыдущего решающего правила.

В случае, когда упорядочение вариантов решений, полученное на некотором шаге, признается лицом, принимающим решение, удовлетворительным и отвечает поставленной задаче это упорядочение выбирается в качестве окончательного. Если лицо, принимающее решение, действует рационально, оно должно выбрать вариант решения в соответствии с полученным упорядочением.

Заключение

Метод сравнительного анализа является наиболее универсальным общенаучным методом исследования. Он является гносеологическим стержнем и ориентиром, дающим общее направление исследованию и регулирующим взаимодействие всех методов. Он используется, в частности, как базовый при статистическом, социологическом и факторном анализе, при классификации, оценивании, прогнозировании процессов и явлений.

В процессе анализа каждый из сравниваемых объектов логически раздваивается: в нем обнаруживается, с одной стороны, то, что является общим с другими объектами, а с другой – то, что отличает его от других объектов. Т.е. сравнение является необходимым элементом диалектического метода познания, чем и определяется весьма большое методологическое значение сравнения в исследованиях.

Список литературы

1. Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989 г.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994 г.
3. Батищев Д.И., Шапошников Д.Е. Многокритериальный выбор с учетом индивидуальных предпочтений. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1994 г. – 92 с.
4. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. М.: Статистика, 1980 г. – 264 с.
5. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях. М.: Знание, 1979 г. – 64 с.
6. Дэвид Г. Метод парных сравнений. М.: Статистика, 1978 г. – 144 с.
7. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981 г.
8. Орлов А.И. Нечисловая статистика. М.: МЗ-Пресс, 2004 г. – 513 с.
9. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982 г.
10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993 г. – 320 с.
11. Сапожков К.А., Бершадский А.М., Пац В.Б. Выбор и применение систем логических элементов ЭВМ. М.: Энергия, 1980 г. – 73 с.
12. Смородинский С.С., Батин Н.В. Методы анализа и принятия управленческих решений. Учебное пособие по курсу "Методы и системы принятия решений" для студентов экономико-управленческих специальностей. Минск: БКУУ, 2000 г. – 101 с.

Содержание